Nichtstandard-Analysis – Blatt 6

Abgabe am 31.5.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $\mathbb{X}$ die disjunkte Vereinigung $\mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und sei ${}^*\mathbb{X}$ eine echte nichtstandard-Erweiterung. (Insbesondere ist ${}^*\mathbb{X} = {}^*\mathbb{R} \cup {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.) Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Elemente von ${}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (die ja zunächst nur abstrakte Elemente von ${}^*\mathbb{X}$ sind) als Teilmengen von ${}^*\mathbb{R}$ aufgefasst werden können.

Um Verwirrung zu vermeiden, fassen wir $\mathbb{X}$ *nicht* als Teilmenge von ${}^*\mathbb{X}$ auf, sondern schreiben, falls $a \in \mathbb{X}$ ist, ${}^*a$ für das entsprechende Element in ${}^*\mathbb{X}$. (Allerdings ist selbst so nicht immer eindeutig, was mit ${}^*a$ gemeint ist; siehe (b).)

Auf $\mathbb{X}$ haben wir die Relation „$\in$“; daraus halten wir wie üblich eine Relation ${}^*{\in}$ auf ${}^*\mathbb{X}$: Wir setzen $R := \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid a \in b\}$ und definieren dann, für $a, b \in {}^*\mathbb{X}$: $a \mathrel{{}^*{\in}} b$ genau dann, wenn $(a,b) \in {}^*R$.

(a) Jedem Element $a \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ordnen wir eine Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ zu, nämlich $M_a := \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid x \mathrel{{}^*{\in}} a\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung ${}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}({}^*\mathbb{R}), a \mapsto M_a$ injektiv ist.

(b) Sei $a \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $M_{{}^*a} = {}^*a$. Hierbei sind mit „${}^*a$“ zwei verschiedene Dinge gemeint: Auf der linken Seite fassen wir a als Element von $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{X}$ auf (und erhalten somit ${}^*a \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \subset {}^*\mathbb{X}$; auf der rechten Seite fassen wir a als Teilmenge von $\mathbb{R} \subset \mathbb{X}$ auf (und erhalten somit für ${}^*a \subset {}^*\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{X}$).

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Wir arbeiten weiterhin mit $\mathbb{X} = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R})$ wie in Aufgabe 1. Außerdem fassen wir jetzt ${}^*\mathbb{R}$ als topologischen Raum mit der Intervalltopologie auf, d. h. y liegt im Abschluss einer Menge $X \subset {}^*\mathbb{R}$, wenn für jedes $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0}$ ein $x \in X$ existiert mit $|y - x| < \epsilon$.

Zeigen Sie, für alle $a \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$:

(a) Es gibt ein $b \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, so dass M_b der topologische Abschluss von M_a ist.

(b) Ist M_a sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist $M_a = \emptyset$ oder $M_a = {}^*\mathbb{R}$.
Zeigen Sie außerdem, dass $\mathrm{mon}(0)$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist.
(Insbesondere gibt es also kein $a \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ mit $M_a = \mathrm{mon}(0)$.)