Nichtstandard-Analysis – Blatt 7

Abgabe am 14.6.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Blatt sei $\mathbb{V}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ sei die Superstruktur über $\mathbb{V}_0$ und ${}^*\mathbb{X}$ sei eine echte nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $f\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ ein Element von ${}^*\mathbb{V}_1$. Wir wollen $g(n) := \prod_{i=1}^{n} f(i)$ definieren, und zwar für beliebige $n \in {}^*\mathbb{N}$.

(a) Was ist mit „f ist ein Element von ${}^*\mathbb{V}_1$“ gemeint? Geben Sie (unter Verwendung der Funktion η_2 aus der Vorlesung) die Teilmenge von ${}^*\mathbb{V}_0$ an, die f repräsentiert.

(b) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $g\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{V}_1$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllt:
- $g(0) = 1$.
- $g(n) = g(n-1) \cdot f(n)$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(c) Existiert ein solches g auch, wenn wir nicht fordern, dass f in ${}^*\mathbb{V}_1$ liegt?

(d) Ist g auch dann noch eindeutig, wenn wir nicht fordern, dass es in ${}^*\mathbb{V}_1$ liegt?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Jetzt können wir Primfaktorzerlegungen von Elementen von ${}^*\mathbb{N}$ „richtig“ definieren.

(a) Formulieren Sie unter Verwendung von Aufgabe 1 eine präzise Version der folgenden Aussage:
„Zu jeder Zahl $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es ein $k \in {}^*\mathbb{N}$, so dass n das Produkt von k vielen Primzahlen ist.“

(b) Zeigen Sie, dass Ihre Aussage aus (a) wahr ist.

(c) Ist k durch n eindeutig festgelegt?

(d) Zeigen Sie, dass es in ${}^*\mathbb{N}$ sowohl Zahlen gibt, die das Produkt von unendlich vielen verschiedenen Primzahlen sind, als auch Zahlen, die unendliche Potenzen einer Primzahl sind.