Nichtstandard-Analysis – Blatt 8

Abgabe am 21.6.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

1	2	3	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Blatt sei $\mathbb{V}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ sei die Superstruktur über $\mathbb{V}_0$ und ${}^*\mathbb{X}$ sei eine echte nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $f\colon A \to B$ eine interne Abbildung zwischen internen Mengen $A, B \subset {}^*\mathbb{X}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $b \in B$ ist $f^{-1}(b)$ intern.

(b) Ist f surjektiv, so gibt es eine interne Abbildung $g\colon B \to A$, so dass $f \circ g$ die Identität auf B ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Ein Körper $K \subset {}^*\mathbb{V}_\ell$ (für $\ell \in \mathbb{N}$) heißt intern, wenn K als Menge intern ist und außerdem die Addition und die Multiplikation interne Abbildungen $K \times K \to K$ sind. Im Folgenden dürfen Sie Standard-Sätze aus der Algebra ohne Beweis verwenden.

(a) Sei K ein interner Körper. Zeigen Sie, dass es genau einen internen Ringhomomorphismus $f\colon {}^*\mathbb{Z} \to K$ gibt, der $1 \in {}^*\mathbb{Z}$ auf das 1-Element in K abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass der Kern von f aus (a) die Form $p\,{}^*\mathbb{Z}$ hat, für ein $p \in {}^*\mathbb{P} \cup \{0\}$. (Hierbei bezeichnet $\mathbb{P} \subset \mathbb{Z}$ die Menge der Primzahlen.)
Dieses p wird die *interne Charakteristik* von K genannt.

(c) Zeigen Sie, für interne Körper K: Liegt die interne Charakteristik von K in $\mathbb{P} \cup \{0\}$, so ist sie gleich der „normalen“ Charakteristik $\operatorname{char} K$; liegt die interne Charakteristik in ${}^*\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}$, so ist $\operatorname{char} K = 0$.

(d) Für festes ℓ betrachten wir die Abbildung, die einen internen Körper $(K, +, \cdot)$ mit $K \subset {}^*\mathbb{V}_\ell$ abbildet auf die interne Charakteristik von K. Ist diese Abbildung intern? Ist sie standard?

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei A eine beidseitig beschränkte, konvexe Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$. (Konvex heißt: Aus $x, y \in A$ und $x < z < y$ für $z \in {}^*\mathbb{R}$ folgt $z \in A$.)

Zeigen Sie: Ist A intern, so ist A bereits ein Intervall, d. h. es gibt $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ mit $a \le b$ und $A = (a, b)$, $A = [a, b)$, $A = (a, b]$ oder $A = [a, b]$.