Nichtstandard-Analysis – Blatt 9

Abgabe am 28.6.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

1	2	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Blatt sei $\mathbb{V}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ sei die Superstruktur über $\mathbb{V}_0$ und ${}^*\mathbb{X}$ sei eine echte nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Ist $A \in {}^*\mathbb{V}_\ell$ hyperendlich und $f\colon A \to {}^*\mathbb{V}_{\ell'}$ eine beliebige interne Abbildung, so ist auch $f(A)$ hyperendlich.

(b) Sei $A \subset \mathbb{V}_0$ eine abzählbare Menge (d. h. es gebe eine Bijektion $\mathbb{N} \to A$). Zeigen Sie, dass es dann eine hyperendliche Menge $B \subset {}^*\mathbb{V}_0$ gibt, die A enthält.

(c) Gibt es eine hyperendliche Menge $H \in {}^*\mathbb{V}_1$ mit ${}^*\mathbb{N} \subset H$?

Aufgabe 2 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir ein „verbessertes“ Integral definieren, mit dem sich völlig beliebige beschränkte Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen integrieren lassen. (Dieses verbesserte Integral verhält sich in vielen Aspekten wie das normale Integral.)

Wir wählen für die gesamte Aufgabe ein festes $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und setzen $Z := \frac{1}{N}{}^*\mathbb{Z} \subset {}^*\mathbb{R}$.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Zeigen Sie: Die Menge ${}^*[a, b] \cap Z$ ist hyperendlich.

(b) Sei jetzt außerdem $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie: $\frac{1}{N}\sum_{z\in {}^*[a,b]\cap Z} {}^*f(z) \in {}^*\mathbb{R}^{\mathrm{fin}}$.

(c) Für a, b, f wie oben definieren wir $⨍_a^b f(x)dx := \mathrm{st}(\frac{1}{N}\sum_{z\in {}^*[a,b]\cap Z} {}^*f(z))$. Zeigen Sie: Ist f Riemann-integrierbar, so ist $⨍_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
Hinweis: Das geht besonders elegant mit Lemma 2.5.1 aus der Vorlesung, wobei das X aus dem Lemma die Menge aller endlichen Zerlegungen von $[a, b]$ ist.

(d) Zeigen Sie: Ist $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine weitere beschränkte Funktion, so ist $⨍_a^b (f(x)+g(x))dx = ⨍_a^b f(x)dx + ⨍_a^b g(x)dx$.

(e) Zeigen Sie: Ist $a \leq c \leq b$, so ist $⨍_a^b f(x)dx = ⨍_a^c f(x)dx + ⨍_c^b f(x)dx$.

(Bonus-Aufgabe (1 Pt): Gilt (c) auch für Lebesgue-integrierbare f?)