Übungsblatt 2

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

Abgabe: 02.05.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Selbstadjungierte kompakte Operatoren)(6P)
Geben Sie eine vollständige Klassifizierung des Langzeitverhaltens von C_0-Halbgruppen auf einem unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum H an, die von einem selbstadjungierten kompakten Operator $A : D(A) \subset H \to H$ erzeugt werden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Verwenden Sie eine Darstellung des Operators A mittels des Spektralsatzes für selbstadjungierte kompakte Operatoren (siehe z.B. Satz 7.36 der Einführung in die Funktionalanalysis im SoSe 2016) und geben Sie damit eine konkrete Darstellung der zugehörigen C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ an (siehe (5-2) in Abschnitt 5.2).
- Weisen Sie nach, dass A Erzeuger dieser C_0-Halbgruppe ist.
- Geben Sie jeweils eine Charakterisierung an, wann $(T(t))_{t\geqslant 0}$ asymptotisch bzw. exponentiell stabil ist.

Aufgabe 2: (Translationshalbgruppe auf beschränkten Intervallen)(2P+2P+1P)
Sei $1 \leqslant p < \infty$. Auf $L^p((0,1))$ definiere

$$(S(t)f)(x) := \begin{cases} f(x+t), & 0 < x+t < 1 \\ 0, & x+t \geqslant 1 \end{cases}$$

für $x \in (0,1)$ und $t \geqslant 0$. Weiterhin sei $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf $L^p(\mathbb{R})$ mit

$$(T(t)f)(x) := f(x+t)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geqslant 0$ die Translationshalbgruppe aus Lemma 2.7.

(a) Zeigen Sie, dass $(S(t))_{t\geqslant 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p((0,1))$ ist.

(b) Untersuchen Sie $(S(t))_{t\geqslant 0}$ und $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf exponentielle, gleichmäßige und asymptotische Stabilität.

(c) Sei A der Generator von $(S(t))_{t\geqslant 0}$. Geben Sie das Spektrum $\sigma(A)$ an.

Aufgabe 3: (Vervollständigung Beweis von Satz 7.17)(3P)
Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.17, indem Sie die Inklusion $\mathscr{R}(P) \subset L^q_\sigma(\mathbb{R}^n)$ für das Bild der Helmholtzprojektion $P \in \mathscr{L}(L^q(\mathbb{R}^n)^n)$ mit $1 < q < \infty$ zeigen.