Übungsblatt 3

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 09.05.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Helmholtzprojektion)(2P+2P)
Sei $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $P \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n)^n)$ die Helmholtzprojektion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\partial^\alpha Pu = P\partial^\alpha u \quad \forall u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)^n \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leqslant k.$

(b) $\partial_t Pu(t) = P\partial_t u(t) \ \forall t > 0 \ \forall u \in C^1((0,\infty), L^p(\mathbb{R}^n)^n).$

Aufgabe 2: (Stokesoperator)(3P)
Sei $1 < p < \infty$ und $P \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n)^n)$ die Helmholtzprojektion. Zeigen Sie für den Laplaceoperator

$$A_L : W^{2,p}(\mathbb{R}^n)^n \subset L^p(\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)^n, \quad u \longmapsto \Delta u$$

und den Stokesoperator

$$A_\sigma : W^{2,p}(\mathbb{R}^n)^n \cap L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \subset L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p_\sigma(\mathbb{R}^n), \quad u \longmapsto P\Delta u = \Delta u,$$

dass $\rho(A_L) \subset \rho(A_\sigma)$ mit $(\lambda - A_\sigma)^{-1} = (\lambda - A_L)^{-1}|_{L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)}$ für alle $\lambda \in \rho(A_L)$ gilt.

Aufgabe 3: (L^p-L^q-Abschätzungen)(4P)
Für $t > 0$ ist der Gauss'sche Kern definiert durch

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie für $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ die Ungleichungen

$$\|G_t * f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\|\nabla G_t * f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} \leqslant C_2 t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

wobei die Konstanten $C_1, C_2 > 0$ nur von n, p und q abhängen.

Aufgabe 4: (2P+2P)
Sei $A : D(A) \subset X \to X$ ein sektorieller Operator in einem komplexen Banachraum X mit $0 \in \rho(A)$.

(a) Zeigen Sie, dass $0 \in \rho(A^\alpha)$ für $\alpha \in [0,1]$ gilt.

(b) Für den Spektralwinkel gelte $\varphi_A < \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie, dass für die Spektralschranke $s(-A^\alpha) < 0$ für alle $\alpha \in [0,1]$ gilt.