Partielle Differentialgleichungen 2
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

SS 2021

Übungsblatt 1

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 1.1 (4 Punkte)
Sei $m_\ell \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit

$$m_\ell(\xi) := \frac{1}{\lambda + |\xi|^{2\ell}}$$

für $\ell \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \Sigma_\varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$ gegeben. Zeigen Sie, dass m_ℓ die Mikhlin-Bedingung erfüllt.

[K] Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ und $1 < p < \infty$. Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ für ein $k > \frac{n}{2}$ und m die Mikhlin-Bedingung

$$\|m\|_{\mathrm{Mik}} := \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{|\alpha|} |\partial^\alpha m(\xi)| < \infty$$

erfüllt, so gilt für den Operator

$$\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

dass $\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gibt eine eindeutige Fortsetzung $T \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$.
Zeigen Sie: Gilt zusätzlich $m \in BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, so ist T die Einschränkung von

$$\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Es ist

$$BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \;:\; \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(\xi)| < \infty \,\text{für alle}\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Aufgabe 1.3
Seien $n \in \mathbb{N}$, $k = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ und $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ eine homogene Funktion vom Grad 0. Zeigen Sie: Dann erfüllt m die Mikhlin-Bedingung.
Hinweis: Eine Funktion m heißt homogen vom Grad $d \in \mathbb{R}$, falls

$$m(r\xi) = r^d m(\xi) \;\; (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, r > 0)$$

gilt. Betrachten Sie zunächst, wie sich der Grad der Homogenität einer solchen Funktion durch Ableiten verändert.

Abgabe bis zum Freitag, den 23. April 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.