Partielle Differentialgleichungen 2
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

SS 2021

Übungsblatt 2

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 2.1 (3 Punkte)
Sei $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $P \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n)^n)$ die Hemholtzprojektion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\partial^\alpha Pu = P\partial^\alpha u$ für alle $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leqslant k$.

(b) $\partial_t Pu(t) = P\partial_t u(t)$ für alle $t > 0$, $u \in C^1((0,\infty), L^p(\mathbb{R}^n)^n)$.

[K] Aufgabe 2.2 (5 Punkte)
Betrachten sie den mit der Corioliskraft gestörten Stokesoperator

$$A_{SC}u := A_\sigma u - M_C u = \Delta u - P\omega e_3 \times u$$

für $\omega > 0$ auf $L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$ für $1 < p < \infty$. Dabei sei e_3 der entsprechende Einheitsnormalenvektor in $\mathbb{R}^3$ und P die Helmholtzprojektion. Zeigen Sie, dass A_{SC} eine holomorphe, aber keine beschränkte holomorphe Halbgruppe auf $L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$ erzeugt. Zeigen Sie außerdem, dass die erzeugte C_0-Halbgruppe auf $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ beschränkt ist.
Hinweise: Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Störungstheorie, dass A_{SC} eine holomorphe Halbgruppe erzeugt.

(ii) Bestimmen Sie das Fouriersymbol $\widehat{A}_{SC}(\xi)$ von A_{SC}. Beachten Sie dabei, dass sich die Störung durch die Corioliskraft als Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schreiben lässt.

(iii) Bestimmen sie nun anhand des Symbols das Spektrum von A_{SC}. Sie dürfen dabei ausnutzen, dass das Spektrum von A_{SC} genau aus $\lambda(\xi)$ besteht, wobei $\lambda(\xi)$ die Eigenwerte der Matrix $\widehat{A}_{SC}(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen. Folgern Sie nun, dass A_{SC} keine beschränkte holomorphe Halbgruppe erzeugen kann.

(iv) Zeigen Sie die Beschränktheit der C_0-Halbgruppe auf $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$.

Aufgabe 2.3
Sei $1 < p < \infty$ und $P \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n)^n)$ die Hemholtzprojektion. Zeigen Sie für den Laplaceoperator

$$A_L : W^{2,p}(\mathbb{R}^n)^n \subset L^p(\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)^n,\ u \mapsto \Delta u$$

und den Stokesoperator

$$A_\sigma : W^{2,p}(\mathbb{R}^n)^n \cap L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \subset L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p_\sigma(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto P\Delta u = \Delta u,$$

dass $\rho(A_L) \subset \rho(A_\sigma)$ mit $(\lambda - A_\sigma)^{-1} = (\lambda - A_L)^{-1}|_{L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)}$ für alle $\lambda \in \rho(A_L)$ gilt.

Abgabe bis zum Freitag, den 30. April 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.