Übungsblatt 3

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Laplace-Operator

$$A_L : H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \Delta u,$$

welcher eine C_0- Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ erzeugt. Zeigen Sie:

(a) $(T(t))_{t\geqslant 0}$ ist asymptotisch stabil.

(b) $(T(t))_{t\geqslant 0}$ ist nicht exponentiell stabil. Geben Sie die Wachstumsschranke $\omega(T)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $\omega(T) = s(A_L)$ gilt.

Hinweis: In Beispiel 9.3 wird der um $s \in \mathbb{R}$ verschobene Operator betrachtet.

[K] Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Stokes-Coriolis Operator

$$A_{SC}u := A_\sigma u - M_C u = \Delta u - P\omega e_3 \times u$$

aus Aufgabe 2.2 auf $L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$ für $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass die von A_{SC} generierte Halbgruppe $(T_{A_{SC}}(t))_{t\geqslant 0} = (\exp(A_{SC}t))_{t\geqslant 0}$ für $1 < q \leqslant p < \infty$, $t > 0$ und $f \in L^q_\sigma(\mathbb{R}^3)$ die folgenden Abschätzungen erfüllt:

$$\|\exp(A_{SC}t)f\|_p \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\exp(\alpha_C t)\|f\|_q,$$

$$\|\nabla \exp(A_{SC}t)f\|_p \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\exp(\alpha_C t)\|f\|_q.$$

Dabei hängt $\alpha_C \in \mathbb{R}$ nur von M_C ab.

Hinweis: Aus Aufgabe 2.2 ist bekannt, dass das zu M_C gehörende Fourier-Symbol durch

$$\widehat{M_C}(\xi) = \frac{\omega\xi_3}{|\xi|^2}\begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & \xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Leiten Sie mit Hilfe der Fourier-Symbole von A_σ und M_C und der Darstellung der Halbgruppen im Fourierbild die Gleichheit

$$T_{A_{SC}}(t) = T_{A_\sigma}(t)T_{-M_C}(t), \quad t \geqslant 0$$

her und gehen gehen Sie dann wie im Beweis von Lemma 8.21 vor.

Aufgabe 3.3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Gilt $\omega(T) = 0$ für die Wachstumsschranke einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf einem Banachraum X, so ist $(T(t))_{t\geqslant 0}$ beschränkt.

(b) Ist eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf einem Banachraum X asymptotisch stabil und hat X endliche Dimension, so ist $(T(t))_{t\geqslant 0}$ gleichmäßig stabil.

Abgabe bis zum Freitag, den 07. Mai 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.