Übungsblatt 4

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 4.1 (3 Punkte)
Sei $1 \leqslant p < \infty$. Wir definieren

$$(S(t)f)(x) := \begin{cases} f(x+t), & 0 < x+t < 1, \\ 0, & x+t \geqslant 1, \end{cases}$$

auf $L^p((0,1))$ für $x \in (0,1)$ und $t \geqslant 0$. Weiterhin bezeichnen wir mit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ die Translationshalbgruppe

$$(T(t)f)(x) := f(x+t)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geqslant 0$ aus Lemma 2.7.

(a) Zeigen Sie, dass $(S(t))_{t\geqslant 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p((0,1))$ ist.

(b) Untersuchen Sie $(S(t))_{t\geqslant 0}$ und $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf exponentielle, gleichmäßige und asymptotische Stabilität.

(c) Sei A der Generator von $(S(t))_{t\geqslant 0}$. Geben Sie das Spektrum $\sigma(A)$ an.

Hinweis: Beachten Sie für (c) die Beziehung zwischen $s(A)$ und $\omega(S)$.

[K] Aufgabe 4.2 (5 Punkte)
Betrachten Sie die Navier-Stokes-Gleichung für rotierende Fluide

$$(NSCG) \begin{cases} u_t - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \omega e_3 \times u + \nabla p = 0 & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

für $p > 3$ auf $L^p(\mathbb{R}^3)$.
Zeigen Sie: Für $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)$ existiert ein $T > 0$ und eine eindeutige milde Lösung $u \in BC([0,T), L^p_\sigma(\mathbb{R}^3))$ von $(NSCG)$.
Hinweis: Nutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 2.2 und 3.2. Gehen Sie wie im Beweis von Satz 8.23 für die Navier-Stokes Gleichung ohne Rotation vor.

Aufgabe 4.3
Der Schrödingeroperator

$$A_S : D(A_S) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad A_S u := i\Delta u$$

mit $D(A_S) = H^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass diese nicht asymptotisch stabil ist.

Abgabe bis zum Freitag, den 14. Mai 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.