Übungsblatt 5

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] **Aufgabe 5.1** (1 + 1 + 2 + 2 Punkte)
Sei $A : D(A) \subset H \to H$ ein selbstaudjungierter Operator in einem separablem Hilbertraum H mit kompakter Resolvente (d.h., es existiert ein $\lambda \in \rho(A)$, sodass $(\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ ein kompakter Operator ist) und $\sigma(A) \subset (-\infty, 0)$. Zeigen Sie:

(a) $(\mu - A)^{-1}$ ist für jedes $\mu \in \rho(A)$ kompakt.

Nach dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren gibt es dann eine Nullfolge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus Eigenwerten von A^{-1} und eine zugehörige Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren, sodass

$$A^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle x, e_k\rangle_H \, e_k$$

für jedes $x \in H$. Zeigen Sie weiter:

(b) $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \langle x, e_k\rangle_H \, e_k$ für alle $x \in D(A)$ und e_k ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\frac{1}{\mu_k}$.

(c) Definiert man einen Funktionalkalkül durch $f(A)x = \sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{1}{\mu_k})\langle x, e_k\rangle_H \, e_k$ für $x \in H$, so ist

$$L^\infty((-\infty, -\delta), \mathbb{C}) \to \mathscr{L}(H), \;\; f \mapsto f(A)$$

mit $\delta := 1/\|A^{-1}\|$ ein Algebren-Homomorphismus mit $\|f(A)\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant \|f\|_\infty$ für alle $f \in L^\infty((-\infty, -\delta), \mathbb{C})$.

(d) Definiert man $T(t)x := \exp(tA)x$, $t \geqslant 0$, $x \in H$ durch den obigen Funktionalkalkül, so ist $(T(t))_{t\geqslant 0}$ eine exponentiell stabile C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A.

[K] **Aufgabe 5.2** (2 Punkte)
Für $y \geqslant 0$ ist der Poissonkern für den Halbraum gegeben durch

$$P_y(s) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{s^2 + y^2}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{2\pi}\, P_{-y}(s) = \mathscr{F}[t \mapsto \exp(-y\,|t|)](s)$ für $y > 0$ gilt.

Aufgabe 5.3
Sei $(T(t))_{t\geqslant 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X. Wir sagen, dass $(T(t))_{t\geqslant 0}$ gleichmäßig stetig auf $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ist, wenn die Folge von Abbildungen

$$T(\cdot)y_n : [0, \infty) \to X, \quad n \in \mathbb{N}$$

gleichgradig stetig in der Null ist, wenn also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t)y_n - y_n\| \xrightarrow{t\searrow 0} 0$. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geqslant 0}$ gleichmäßig stetig auf jeder Nullfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ist.

Abgabe bis zum Freitag, den 21. Mai 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.