Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Partielle Differentialgleichungen 2
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

SS 2021

Übungsblatt 6

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 6.1 (5 Punkte)

Sei $T \in (0, \infty]$, $1 < p < \infty$ und $A : D(A) \subset X \to X$ abgeschlossen im Banachraum X. A hat maximale L^p-Regularität auf $[0, T)$, falls für alle $(f, x) \in L^p((0, T), X) \times I_p(A) =: \mathbb{F}$ eine Funktion $u : [0, T) \to X$ existiert, die das Cauchyproblem

$$(\mathrm{CP})_{f,x} \begin{cases} u_t + Au = f \text{ in } (0, T) \\ \quad u(0) = x \end{cases}$$

fast überall löst (d.h. u ist für fast alle $t \in (0, T)$ differenzierbar mit $u(t) \in D(A)$ für fast alle $t \in (0, T)$ und $u_t + Au = f$ fast überall in $(0, T)$ sowie $u(0) = x$) und falls es ein $C = C(T) > 0$ gibt, sodass für alle $(f, x) \in \mathbb{F}$ die Ungleichung

$$(\mathrm{MRU}) \qquad \|\dot{u}\|_{L^p((0,T),X)} + \|Au\|_{L^p((0,T),X)} \leqslant C \left(\|f\|_{L^p((0,T),X)} + \|x\|_{I_p(A)}\right)$$

erfüllt ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn A maximale L^p-Regularität hat und eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt, so gilt für die Lösung u von $(CP)_{f,x}$ zu $(f, x) \in \mathbb{F}$, dass

$$u(t) = \exp(-tA)x + \int_0^t \exp(-(t-s)A)f(s)\, ds$$

für alle $t \in [0, T)$.

(b) Existiert für alle $f \in L^p((0, T), X)$ eine Funktion $u : [0, T) \to X$, die $(\mathrm{CP})_{f,0}$ fast überall löst, und eine Konstante $C > 0$, sodass die Ungleichung (MRU) mit $x = 0$ erfüllt ist, so hat A bereits maximale Regularität auf $[0, T)$, falls A eine beschränkte holomorphe Halbgruppe erzeugt.

Hinweis: Betrachten Sie für (a) die (fast überall existierende) Ableitung der Funktion $s \mapsto \exp(-(t-s)A)u(s)$. Wählen Sie für (b) zu $x \in I_p(A)$ ein geeignetes $v \in \mathbb{E}$ mit $v(0) = x$ und betrachten Sie das Problem $(\mathrm{CP})_{f-(\dot{v}+Av),0}$.

[K] Aufgabe 6.2 (3 Punkte)

Seien X ein Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie die Einbettung:

$$W^{1,p}((0, T), X) \hookrightarrow C([0, T], X) = BUC([0, T], X)$$

für $T \in (0, \infty)$.
Hinweis: Betrachten Sie $u \in C^\infty([0, T], X)$. Zeigen Sie zunächst $\|u(0)\|_X \leqslant C_T \|u\|_{W^{1,p}((0,T),X)}$ für ein solches u, indem Sie

$$u(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(u(t) - \int_0^t u'(s)\, ds \right) dt$$

verwenden. Folgern Sie daraus, dass $(C^\infty([0,T],X), \|\cdot\|_{W^{1,p}((0,T),X)}) \hookrightarrow C([0,T],X)$, und nutzen Sie dann $C^\infty([0,T],X) \overset{d}{\hookrightarrow} W^{1,p}((0,T),X)$ aus.

Aufgabe 6.3

Sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$. Zeigen Sie, dass A für $T \in (0,\infty)$ und $1 < p < \infty$ maximale L^p-Regularität besitzt.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass A eine holomorphe, aber nicht notwendigerweise beschränkte Halbgruppe erzeugt. Weisen Sie die maximale Regularität dann anhand der Definition nach.

Abgabe bis zum Freitag, den 28. Mai 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.