Übungsblatt 7

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] **Aufgabe 7.1** (5 Punkte)

Seien X, Y komplexe Banachräume, $1 < p < \infty$ und $M_p(\mathbb{R}^n, X, Y)$ der Raum der operatorwertigen Fouriermultiplikatoren von $L^p(\mathbb{R}^n, X)$ nach $L^p(\mathbb{R}^n, Y)$. Setze außerdem $M_p(\mathbb{R}^n) = M_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $M_p(\mathbb{R}^n, X, Y) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(X, Y))$.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für den Fall $X = Y = \mathbb{C}$, indem Sie für $1 < p < \infty$ die Implikationen

$$m \in M_p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow m \in M_p(\mathbb{R}^n) \cap M_{p'}(\mathbb{R}^n), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Rightarrow m \in M_2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

zeigen. Die zweite Implikation folgt mit dem Satz von Riesz-Thorin (vgl. Grafakos: Classical Fourier Analysis, Kap. 1.3.2). Verallgemeinern Sie die Aussage anschließend für $m \in M_p(\mathbb{R}^n, X, Y)$ mit Hilfe der Darstellung

$$\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(X,Y))} = \operatorname*{ess-sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sup_{x \in X, \|x\|_X \leqslant 1} \sup_{y' \in Y', \|y'\|_{Y'} \leqslant 1} \left| \langle m(\xi)x, y' \rangle \right|.$$

[K] **Aufgabe 7.2** (3 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie, dass $W^{1,1}((0,\infty), X) \hookrightarrow BUC([0,\infty), X)$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $u \in C_c^\infty([0,\infty), X)$ und nutzen Sie aus, dass $C_c^\infty([0,\infty), X) \overset{d}{\hookrightarrow} W^{1,1}((0,\infty), X)$. Nutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 6.2, um die gleichmäßige Stetigkeit zu zeigen.

Aufgabe 7.3

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathscr{A}$ die Realisierung von $A(\cdot, \partial)$ in $L^2(G, \mathbb{R})$, welche gegeben ist wie in Satz 8.15 im Skript. Zeigen Sie, dass $m_\lambda : \lambda \mapsto \mathscr{A}(i\lambda + \mathscr{A})^{-1}$ ein Fouriermultiplikator auf $L^2(\mathbb{R}, L^2(G, \mathbb{R}))$ ist.

Abgabe bis zum Freitag, den 04. Juni 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.