Übungsblatt 9

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 9.1 (2+2 Punkte)

(a) Seien X, Y komplexe Banachräume und $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ eine Familie beschränkter Operatoren. Wir betrachten die konvexe, die kreisförmige und die absolutkonvexe Hülle von $\mathcal{T}$, welche wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} co(\mathcal{T}) &:= \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j T_j \,:\, N \in \mathbb{N},\ (\alpha_j)_{j=1}^{N} \subset [0,1],\ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1,\ T_j \in \mathcal{T} \right\}, \\ circ(\mathcal{T}) &:= \{ \beta T \,:\, \beta \in \mathbb{C},\ |\beta| \leqslant 1,\ T \in \mathcal{T} \}, \\ aco(\mathcal{T}) &:= \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j T_j \,:\, N \in \mathbb{N},\ (\lambda_j)_{j=1}^{N} \subset \mathbb{C},\ \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \leqslant 1,\ T_j \in \mathcal{T} \right\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $aco(\mathcal{T}) = co(circ(\mathcal{T}))$ gilt.

(b) Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\Delta_k := \langle \cdot, e_k \rangle e_k \quad k \in \mathbb{N}$$

eine unbedingte Schauderzerlegung $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H gegeben ist und geben Sie die Unbedingtheitskonstante an.

[K] Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Seien X, Y komplexe Banachräume und $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ eine Familie beschränkter Operatoren. Zeigen Sie, dass die Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit unabhängig von der Wahl des Wahrscheinlichkeitsraumes $\mathcal{P} = (\Omega, M, \mu)$ ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\mathcal{T}$ bereits in einem Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{P}' = (\Omega', M', \mu')$ gilt. Gehen Sie dann ähnlich wie in Schritt 3 im Beweis von Satz 10.38 vor, indem Sie die randomisierte Summe für $\mathcal{R}$-Beschränktheit in $\mathcal{P}$ durch Einfügen von $\varepsilon_j'(\omega')^2 = 1$ für $\varepsilon_j' \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}'}$ und Ausnutzung des Kontraktionsprinzips von Kahane aus Lemma 10.19 (statt der Eigenschaft (α)) auf die randomisierte Summe in $\mathcal{P}'$ zurückführen und dort die $\mathcal{R}$-Beschränktheit ausnutzen.

Aufgabe 9.3

Sei X ein Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $T \in (0,\infty]$ existiert der Spuroperator auf $W^{1,p}(J,X)$ mit $J := (0,T)$, d.h., der dicht definierte Operator

$$\gamma_0 : C_c^\infty(\overline{J}, X) \subset W^{1,p}(J,X) \to X, \quad u \mapsto \gamma_0 u := u(0)$$

besitzt eine stetige Fortsetzung $\gamma_0 : W^{1,p}(J,X) \to X$.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $T < \infty$ und denken Sie an Aufgabe 6.2.

(b) Für $T \in (0, \infty]$ und $u \in W^{1,p}(J, X)$ gilt die Darstellung

$$u(t) := \int_0^t u'(s)\, ds + \gamma_0 u$$

für fast alle $t \in J$.
Hinweis: Betrachten Sie auch für diese Aussage zunächst den Fall $T < \infty$ und beachten Sie, dass dann $C_c^\infty(\overline{J}, X) = C^\infty(\overline{J}, X)$ gilt.

Abgabe bis zum Freitag, den 18. Juni 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.