Übungsblatt 10

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

Definition. Ein linearer, dicht definierter Operator $A : D(A) \subset X \to X$ in einem Banachraum X heißt $\mathcal{R}$-pseudo-sektoriell ($A \in \mathcal{R}\Psi S(X)$), falls ein $\varphi \in (0, \pi)$ existiert, sodass $\sigma(A) \subset \overline{\Sigma}_\varphi$ und

$$\mathcal{R}\{\lambda(\lambda + A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi}\} < \infty. \tag{1}$$

Das Infimum aller $\varphi \in (0, \pi)$, sodass (1) erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\varphi_A^{\mathcal{R}}$. Gilt zusätzlich $\overline{R(A)} = X$, so ist A $\mathcal{R}$-sektoriell ($A \in \mathcal{R}S(X)$).

[K] **Aufgabe 10.1** (4 Punkte)

Seien X, Y Banachräume und $A : D(A) \subset X \to X$ ein dicht definierter Operator in X. Zeigen Sie:

(i) $A \in \mathcal{R}\Psi S(X)\,(\mathcal{R}S(X)) \Rightarrow \mu + A \in \mathcal{R}S(X)$ für $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_A^{\mathcal{R}}}$ und $\varphi_{\mu+A}^{\mathcal{R}} \leqslant \max\{\varphi_A^{\mathcal{R}}, |\arg \mu|\}$.

(ii) $A \in \mathcal{R}\Psi S(X)\,(\mathcal{R}S(X)) \Rightarrow \mu A \in \mathcal{R}\Psi S(X)\,(\mathcal{R}S(X))$ für $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_A^{\mathcal{R}}}$ und $\varphi_{\mu A}^{\mathcal{R}} \leqslant \varphi_A^{\mathcal{R}} + |\arg \mu|$.

(iii) Sei $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann gilt

$$A \in \mathcal{R}\Psi S(X)\,(\mathcal{R}S(X)) \Leftrightarrow TAT^{-1} \in \mathcal{R}\Psi S(Y)\,(\mathcal{R}S(Y))$$

mit $\varphi_{TAT^{-1}}^{\mathcal{R}} = \varphi_A^{\mathcal{R}}$.

Hinweis: Denken Sie an Satz 5.21 aus der Vorlesung.

[K] **Aufgabe 10.2** (4 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $\sigma(A) \subset \Sigma_\varphi$ für einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{R}S(X)$ mit $\varphi_A^{\mathcal{R}} \leqslant \varphi$.
Hinweis: Betrachten Sie für $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi}$ die Fälle $|\lambda| \leqslant 2\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$ sowie $|\lambda| > 2\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$. Nutzen Sie im ersten Fall Bem. 10.22 (d) aus und stellen Sie $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ im zweiten Fall durch die Neumann'sche Reihe dar.

Aufgabe 10.3

Sei X ein Banachraum, $1 \leqslant p < \infty$, $T \in (0, \infty)$ und $A : D(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator. Zeigen Sie, dass A genau dann maximale Regularität auf $(0, T)$ hat (also $A \in MR(X, C(T))$ mit einer Konstanten $C(T) > 0$), wenn A maximale Regularität auf $(0, T')$ hat für jedes $T' \in (0, \infty)$ (also $A \in MR(X, C(T'))$ mit einer Konstanten $C(T') > 0$).
Hinweis: Zeigen Sie, dass man die Lösung u des Cauchyproblems auf $(0, T)$ fortsetzen kann zu einer Lösung auf $(0, T + T_1)$ für ein $T_1 < T$. Untersuchen sie dann den Lösungsoperator L auf dem Intervall $(0, T + T_1)$ auf Isomorphie und Stetigkeit.

Abgabe bis zum Freitag, den 25. Juni 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.