Übungsblatt 11

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 11.1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Operator

$$A : D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto \Delta^2 u$$

für $1 < p < \infty$ und $D(A) := W^{4,p}(\mathbb{R}^n)$ maximale Regularität auf $J = (0, \infty)$ besitzt.
Hinweis: Wählen Sie $\varphi \in (0, \pi)$ und $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi}$. Gehen Sie in mehreren Schritten vor:

(1) Leiten Sie zunächst das Symbol m_λ für $(\lambda + A)^{-1}$ her.

(2) Betrachten Sie dann $\lambda m_\lambda(\xi)$ als Operator auf $\mathbb{C}$, also $\lambda m_\lambda(\xi) \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$, und wenden Sie einen der operatorwertigen Multiplikatorsätze an, um die $\mathcal{R}$-Sektorialität von A zu erhalten. Nutzen Sie dabei die Abschätzungen aus, die wir im Beweis von Satz 8.9 erhalten haben.

(3) Folgern Sie aus der $\mathcal{R}$-Sektorialität, dass A maximale Regularität besitzt.

[K] Aufgabe 11.2 (4 Punkte)
Sei $1 < p < \infty$ und $A = \Delta^2$ wie in Aufgabe 11.1 definiert. Zeigen Sie, dass es zu jedem $T \in (0, \infty)$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$\overline{L} : \mathbb{E}_T \to \mathbb{F}_T,\quad u \longmapsto \begin{pmatrix} \dot{u} + \Delta^2 u + a \cdot \Delta u \\ u(0) \end{pmatrix}$$

für alle $a \in L^\infty((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^3))$ mit $\|a\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^3))} < \varepsilon$ ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Nutzen Sie den Isomorphismus L, den sie aus Aufgabe 11.1 erhalten, und versuchen Sie, diesen mit Hilfe der Neumannschen Reihe zu stören.

Aufgabe 11.3
Seien E, F Banachräume, $G \subset E$ offen und $f : G \to F$ eine Abbildung. Wie in Definition 11.6 nennen wir f Fréchet-differenzierbar in $u_0 \in G$, falls es ein $A(u_0) \in \mathscr{L}(E, F)$ gibt, sodass

$$\lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0) - A(u_0)(u - u_0)}{\|u - u_0\|_E} = 0 \tag{1}$$

in F gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist f Fréchet-differenzierbar in $u_0 \in G$, so ist f auch stetig in $u_0 \in G$.

(b) Die Ableitung $A(u_0)$ ist eindeutig, d.h., für jedes $B \in \mathscr{L}(E, F)$, dass (1) erfüllt, gilt $A(u_0) = B$.

Abgabe bis zum Freitag, den 02. Juli 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.