Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 8

Abgabe der Lösungen am 13.12.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgaben 8.1 und 8.2 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösung zu der Aufgabe 8.3 ab; weitere Informationen auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 8.1

Sei p eine Primzahl, und eine endlich erzeugte Gruppe G. Zeigen Sie:

(a) Für $i \in \mathbb{N}$ ist $G_i = (\gamma_i G)G^{p^{i-1}}$ eine vollinvariante Untergruppe von endlichem Index in G; weiter ist $|G : G_i|$ stets eine p-Potenz.

(b) Ist N ein Normalteiler von G dergestalt, daß G/N eine endliche p-Gruppe ist, so gilt $G_i \subseteq N$ für alle hinreichend großen $i \in \mathbb{N}$.

(c) G ist residuell eine endliche p-Gruppe genau dann, wenn $\bigcap\{G_i \mid i \in \mathbb{N}\} = 1$ ist.

Aufgabe 8.2

Sei p eine Primzahl und G residuell eine endliche p-Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $H \le G$ eine endliche Untergruppe, so ist H eine p-Gruppe.

(b) Für $N \trianglelefteq G$ ist $C = \mathrm{C}_G(N) \trianglelefteq G$, und G/C residuell eine endliche p-Gruppe.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul, der additiv isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie: A ist rational irreduzibel genau dann, wenn jeder G-Untermodul $B \ne 0$ bereits endlichen Index $|A : B|$ besitzt.

(b) Sei H eine Gruppe, und sei $1 \ne A \trianglelefteq H$ frei abelsch von endlichem Rang. Weiter enthalte A keinen Normalteiler $1 \ne B \trianglelefteq H$, der frei abelsch von kleinerem Rang als A wäre. Zeigen Sie: Dann ist A, per Konjugation, ein rational irreduzibler H/A-Modul.