Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2003/2004
21.10.03
Blatt 1

Übungen zu Topologie I

1. Man finde eine endliche Menge X und eine Teilmenge $\mathcal{B}$ der Potenzmenge von X, so dass $\mathcal{B}$ nicht die Basis einer Topologie auf X ist.

2. Sei X ein topologischer Raum.

   (a) Eine Teilmenge A von X heißt **dicht** in X, wenn $\bar{A} = X$. Zeige, dass A genau dann dicht in X ist, wenn gilt:
   Ist U offen in X, $U \neq \emptyset$, so ist $U \cap A \neq \emptyset$.

   (b) X heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt. Zeige: Wenn die Topologie von X eine abzählbare Basis besitzt, so ist X separabel.

3. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, die von der Form $[a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ sind.

   (a) Zeige, dass $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ ist. Wir bezeichnen den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mit X.

   (b) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist feiner als die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$.

   (c) Jedes Element von $\mathcal{B}$ ist offen und abgeschlossen in X.

   (d) Der Raum X ist separabel, aber seine Topologie besitzt keine abzählbare Basis.

Abgabe: Mittwoch, den 29.10.03, 14.15 Uhr