Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2003/2004
4.11.03
Blatt 3

Übungen zu Topologie I

8. Sei X ein Hausdorff-Raum und seien A, B kompakte Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es offene Teilmengen U, V von X mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

9. Sei T der Torus in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man die Teilmenge $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ um die z-Achse rotieren lässt. Zeigen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zueinander sind:

   (a) T

   (b) $S^1 \times S^1$

   (c) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 := \mathbb{R}^2/\sim$, wobei für $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt:
   $$u \sim v :\Leftrightarrow \ \exists\, w \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } v = u + w.$$

10. Auf $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ bezeichnen wir mit N den Nordpol $(0, 0, 1)$ und mit S den Südpol $(0, 0, -1)$. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf S^2 sei gegeben durch
    $$u \sim v :\Leftrightarrow \ u = v \text{ oder } u, v \in \{N, S\}.$$
    Ferner sei X die Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die entsteht, wenn man den Kreis $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + z^2 = 1\}$ um die z-Achse rotieren lässt. Zeigen Sie, dass $S^2/\sim$ und X zueinander homöomorph sind.

11. Ist X ein topologischer Raum und A ein Teilraum von X, so definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch
    $$x \sim y :\Leftrightarrow \ x = y \text{ oder } (x \in A \text{ und } y \in A).$$
    Man schreibt auch X/A statt $X/\sim$.

    (a) Ist $D^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$, so ist D^n/S^{n-1} homöomorph zu S^n.

    (b) $\mathbb{R}^n/D^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Abgabe: Mittwoch, den 12.11.03, 14.00 Uhr