Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2003/2004
18.11.03
Blatt 5

Übungen zu Topologie I

17. (a) Seinen X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Ist f eine Homotopieäquivalenz und ist $f \simeq g$, so ist g eine Homotopieäquivalenz.
    (b) Was sind die Isomorphismen in der Homotopiekategorie $\mathfrak{T}_h$?

18. Zeigen Sie: Ein wegzusammenhängender Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $S^1 \to X$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

19. (a) Wir betrachten $\mathbb{Z}^n$ als die Menge aller Elemente in $\mathbb{R}^n$, deren Koordinaten ganzzahlig sind. Wir fassen die Vektoren in $\mathbb{R}^n$ als Spalten auf.
    Zeigen Sie, dass es für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ genau eine ganzzahlige Matrix A_φ gibt mit $\varphi(x) = A_\varphi \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$.
    (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{Z}^m$ für $n \neq m$ nicht isomorph sind.
    (c) Folgern Sie, dass der n-dimensionale Torus $T^n := (S^1)^n$ nicht homotopieäquivalent zu T^m ist, falls $n \neq m$.
    (Dabei darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.)

20. (a) Zeigen Sie, dass eine Überlagerung eine offene Abbildung ist.
    (b) Finden Sie eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ und eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{A}$ von $\tilde{X}$, so dass $p(\tilde{A})$ nicht abgeschlossen in X ist.

21. Ist $h \in \mathbb{Z}$ und $h \neq 0$, so ist die durch $p(z) := z^h$ definierte Abbildung $p : S^1 \to S^1$ eine Überlagerung.

Abgabe: Mittwoch, den 26.11.03, 14.00 Uhr