Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2003/2004
2.12.03
Blatt 7

Übungen zu Topologie I

27. Sei $p : \mathbb{R} \to S^1$ die durch $p(t) = \exp(2\pi i t)$ gegebene Überlagerung. Als Basispunkte wählen wir $1 \in S^1$ und $0 \in \mathbb{R}$.
Sei G die Gruppe der Decktransformationen von p. Definiert man $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_n(t) = t + n$ für $n \in \mathbb{Z}$, so ist $G = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, wie in §7 der Vorlesung gezeigt. Aus Satz 2 von §7 erhält man einen Isomorphismus
$$k : \pi_1(S^1, 1) \to G,\ [f] \mapsto k_{[f]}.$$
Wir definieren $f_n : I \to S^1$ durch
$$f_n(t) = \exp(2\pi i n t).$$
Zeigen Sie:
   (a) $k_{[f_n]} = \varphi_n$.
   (b) Durch $n \mapsto [f_n]$ erhält man einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}$ auf $\pi_1(S^1, 1)$.
   (c) Definiert man $p_n : S^1 \to S^1$ durch $p_n(z) := z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, so ist
   $$p_{n*} : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$$
   gegeben durch $p_{n*}(\alpha) = \alpha^n\ \forall \alpha \in \pi_1(S^1, 1)$.

28. (a) Seien $p_i : \tilde{X}_i \to X_i$ Überlagerungen, $i = 1, \dots, n$. Ist $\tilde{X} := \tilde{X}_1 \times \dots \times \tilde{X}_n$, $X := X_1 \times \dots \times X_n$ und $p := p_1 \times \dots \times p_n : \tilde{X} \to X$, so ist p eine Überlagerung.
   (b) Die Bezeichnungen seien wie in (a); außerdem seien die $\tilde{X}_i$ wegzusammenhängend. Sei G_i die Gruppe der Decktransformationen von p_i, $i = 1, \dots, n$, und G die von p.
   Zeigen Sie, dass man durch
   $$(h_1, \dots, h_n) \mapsto h_1 \times \dots \times h_n$$
   einen Isomorpismus von $G_1 \times \dots \times G_n$ auf G erhält.

29. In dieser Aufgabe schreiben wir die Elemente von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ und $T^n := (S^1)^n$ als Spalten oder in der Form $(x_1, \dots, x_n)^T$. Mit 1 bezeichnen wir das Element $(1, \dots, 1)^T \in T^n$.

Bitte wenden!

(a) Man erhält einen Isomorphismus

$$\eta : \mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^n, 1)$$

durch

$$\eta((m_1, \ldots, m_n)^T) = [(f_{m_1}, \ldots, f_{m_n})^T].$$

Wie in Aufg. 27 ist dabei $f_m : I \to S^1$ gegeben durch

$$f_m(t) := \exp(2\pi i m t).$$

(b) Wir betrachten (vgl. Aufg. 28(a)) die Überlagerung

$$p : \mathbb{R}^n \to T^n$$

$$p((t_1, \ldots, t_n)^T) = (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})^T.$$

Ist $A \in M_n(\mathbb{Z})$, so betrachten wir A als Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ und von $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{Z}^n$.

Zeigen Sie: Es gibt genau eine stetige Abbildung $\varphi_A : T^n \to T^n$, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T^n & \xrightarrow[\varphi_A]{} & T^n \end{array}$$

(c) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}^n \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle \eta} \\ \pi_1(T^n, 1) & \xrightarrow[(\varphi_A)_*]{} & \pi_1(T^n, 1) \end{array}$$

30. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2 von §7 der Vorlesung (Beziehung zwischen der Gruppe der Decktransformationen und der Fundamentalgruppe).

Abgabe: Mittwoch, den 10.12.03, 14.00 Uhr