Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2003/2004
9.12.03
Blatt 8

Übungen zu Topologie I

31. Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum, dessen Fundamentalgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe Σ_3 aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ ist. Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen von Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$ mit wegzusammenhängendem $\tilde{X}$.

32. Vervollständigen Sie den Beweis des Lemmas aus §8 der Vorlesung.

33. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wobei $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

    (a) Genau dann ist p regulär, wenn es ein $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$ gibt, so dass $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ Normalteiler in $\pi_1(X, p(\tilde{x_0}))$ ist.

    (b) Ist p regulär und sind $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x_0}) = p(\tilde{x_1})$, so gibt es eine Decktransformation h mit $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$.

    (c) Genau dann ist p regulär, wenn für jeden geschlossenen Weg in X entweder alle Hochhebungen geschlossen sind oder keine Hochhebung geschlossen ist.

34. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $X_k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - k| = 1\}$.
    Sei $X := X_{-1} \cup X_1$, $\tilde{X} := X_{-3} \cup X_{-1} \cup X_1 \cup X_3$ und sei $p : \tilde{X} \to X$ die folgende Überlagerung:

    - für $z \in X_3$ sei $p(z) = z - 2$,
    - für $z \in X_1$ sei $p(z) = (z - 1)^2 - 1$ und
    - für $z \in X_{-3} \cup X_{-1}$ sei $p(z) = -p(-z)$.

    Fertigen Sie eine Skizze von p an; zeigen Sie, dass p nicht regulär ist (Aufg. 33(c)!) und folgern Sie, dass $\pi_1(X)$ nicht abelsch ist.

Abgabe: Mittwoch, den 17.12.03, 14.00 Uhr