Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

WS 2003/2004
16.12.03
Blatt 9

Übungen zu Topologie I

35. Führen Sie den Beweis von Lemma 2 von §9 aus, d.h. zeigen Sie, dass Koprodukte, falls sie existieren, im Wesentlichen eindeutig bestimmt sind.

36. Seien G_1 und G_2 Gruppen. Weisen Sie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes in $G_1 * G_2$ nach.

37. Seien (A_1, a_1) und (A_2, a_2) punktierte topologische Räume.
Sei $A := \{(x, y) \in A_1 \times A_2 \mid x = a_1 \text{ oder } y = a_2\}$.
Zeigen Sie, dass die punktierten topologischen Räume $(A, (a_1, a_2))$ und $(A_1 \vee A_2, a_1 \vee a_2)$ isomorphe Objekte in $\mathfrak{T}^0$ sind und zeigen Sie, dass sie zusammen mit den offensichtlichen Abbildungen Koprodukt von (A_1, a_1) und (A_2, a_2) in $\mathfrak{T}^0$ sind.

38. Sei $M := (\,[0,1] \times]-1,1[\,)/\sim$, wobei $\sim$ die von $(0,t) \sim (1,-t)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Man nennt M das Möbiusband.

    (a) M ist homotopieäquivalent zu S^1.

    (b) Sei $p : [0,1] \times]-1,1[\to M$ die natürliche Projektion und $S := p(\,[0,1] \times \{0\})$ die „Seele"des Möbiusbandes.
    Zeigen Sie, dass $M \backslash S$ homotopieäquivalent zu S^1 ist.

    (c) Sei $i : M \backslash S \to M$ die Inklusion. Berechnen Sie $i_* : \pi_1(M \backslash S) \to \pi_1(M)$.

    (d) Gegeben sei ein Push-out-Diagramm in der Kategorie der Gruppen der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H \end{array}$$

    mit $\varphi_1(n) = 2n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe H mehr als ein Element enthält.

    (e) Folgern Sie mittels des Satzes von Seifert-van Kampen, dass S^2 keine zu M homöomorphe offene Teilmenge enthält. Insbesondere ist M nicht homöomorph zum Zylinder $S^1 \times]-1,1[$.

Abgabe: Mittwoch, den 7.1.04, 14.00 Uhr