Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2004
25.06.2004
Blatt 10

Übungen zu Topologie II

31. Eine kurze exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

von R-Moduln heißt spaltend, wenn es einen Homomorphismus $\sigma : C \to B$ mit $\psi \circ \sigma = id_C$ gibt.

(a) Ist C frei, so ist $(*)$ spaltend.

(b) Genau dann ist $(*)$ spaltend, wenn es einen Homomorphismus $\rho : B \to A$ gibt mit $\rho \circ \varphi = id_A$.

(c) Ist $(*)$ spaltend, so ist $B \cong A \oplus C$.

(d) Zeigen Sie mittels eines Beispiels, dass es Sequenzen gibt, die nicht spaltend sind.

32. Führen Sie den Beweis von Satz 1 von §11 aus, d.h. zeigen Sie: Ist R ein Hauptidealring und

$$0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, so hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Tor}^R(A', B) \xrightarrow{\mu_*} \operatorname{Tor}^R(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \operatorname{Tor}^R(A'', B) \to A' \otimes_R B \xrightarrow{\mu \otimes 1} A \otimes_R B \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} A'' \otimes_R B \to 0.$$

33. Sei n eine natürliche Zahl und sei X ein topologischer Raum mit

$$H_i(x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i = 0, \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 & \text{für } i = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Homologiegruppen und die Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/3$ und $\mathbb{Z}/4$.

34. Ist A eine abelsche Gruppe, so heißt

$$T(A) := \{x \in A \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = 0\}$$

die Torsionsuntergruppe von A. Zeigen Sie:

(a) $A/T(A)$ ist torsionsfrei.

(b) Ist B eine abelsche Gruppe, so ist $\mathrm{Tor}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B) \cong T(B)$.

(c) Sind A, B abelsche Gruppen, so ist

$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(T(A), T(B)).$$

Abgabe: Freitag, den 02.07.2004, 11.00 Uhr