Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2004
16.07.2004
Blatt 12

Übungen zu Topologie II

38. Sei K ein Körper. Ein graduierter K-Vektorraum ist ein K-Vektorraum V mit einer Zerlegung $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ in eine direkte Summe von Unterräumen.
Ist V ein endlich-dimensionaler graduierter K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $\varphi(V_n) \subseteq V_n$ für alle n, so bezeichnen wir mit $\varphi_n : V_n \to V_n$ die Einschränkung von φ und nennen
$$\lambda(\varphi) := \Sigma(-1)^n \text{ Spur } (\varphi_n)$$
die Lefschetz-Zahl von φ.
Ist C ein endlich-dimensionaler K-Kettenkomplex, $\varphi : C \to C$ eine Kettenabbildung und $\varphi_* : H_*(C) \to H_*(C)$ der induzierte Homomorphismus, so zeige man in Verallgemeinerung von Bemerkung 1 vom §15 :
$$\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_*)$$
("Spurformel von Hopf").

39. Ist X ein topologischer Raum mit $\dim_{\mathbb{Q}} H_*(X;\mathbb{Q}) < \infty$ und ist $f : X \to X$ stetig mit induziertem Homomorphismus $f_* : H_*(X;\mathbb{Q}) \to H_*(X;\mathbb{Q})$, so nennen wir
$$\lambda(f) := \lambda(f_*)$$
die Lefschetz-Zahl von f.
   (a) Sei K ein Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^m$ und $\varphi : K \to K$ eine simpliziale Abbildung, so dass 0 und $\varphi(\sigma)$ für jedes $\sigma \in K$ disjunkt sind, so folgere man aus Aufgabe 38:
$$\lambda(|\varphi|) = 0.$$
   (b)* Ist X ein kompaktes Polyeder und ist $f : X \to X$ stetig, so kann man mittels des simplizialen Approximationssatzes in Verallgemeinerung von (a) zeigen: Ist $\lambda(f) \neq 0$, so besitzt f einen Fixpunkt ("Fixpunktsatz von Lefschetz").

40. (a) Folgern Sie aus Aufgabe 39: Ist X ein kompaktes zusammenziehbares Polyeder und $f : X \to X$ stetig, so besitzt f einen Fixpunkt.
   (b) Ist $f : S^n \to S^n$ stetig, so bezeichnen wir mit $\deg f$ die ganze Zahl mit $f_*(x) = \deg f \cdot x$ für $x \in H_n(S^n)$. Zeigen Sie:
$$\lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg f.$$
   (c) Sei $a : S^n \to S^n$ definiert durch $a(x) := -x$. Folgern Sie, dass $\deg a = (-1)^{n+1}$.
   (d) Sei n eine gerade natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $f : S^n \to S^n$ gibt, so dass $f(x)$ senkrecht zu x ist für alle $x \in S^n$. ("Ein Igel kann nicht stetig gekämmt werden.")

Abgabe: Freitag, den 23.07.2004, 11.00 Uhr