Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2004
30.04.2004
Blatt 2

Übungen zu Topologie II

3. Seien C, D Kettenkomplexe und sei M die Menge der Kettenabbildungen von C nach D. Zeigen Sie: Durch "f ist kettenhomotop zu g" erhält man eine Äquivalenzrelation auf M.

4. Seien C, D, E Kettenkomplexe. Seien $f, g : C \longrightarrow D$ kettenhomotope Kettenabbildungen und ebenso $h, k : D \longrightarrow E$. Dann sind $h \circ f$ und $k \circ g$ kettenhomotop.

5. Wir betrachten die beiden Kettenkomplexe $C = (C_n, \partial_n)$ und $D = (D_n, \partial\,'_n)$, die gegeben sind durch
$$C_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n = 0, 1, \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$$
$$\partial_1(z) = 2z \text{ für } z \in C_1,$$
$$D_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Finden Sie zwei Kettenabbildungen $\varphi, \psi : C \longrightarrow D$, die nicht kettenhomotop sind, so dass aber $\varphi_* = \psi_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

6. Seien $C = (C_n, \partial_n)$ und $D = (D_n, \partial\,'_n)$ zwei Kettenkomplexe und sei $\varphi : C \longrightarrow D$ eine Kettenabbildung. Wir definieren abelsche Gruppen
$$\overline{C}_n := C_{n-1} \oplus D_n$$
und Homomorphismen $\overline{\partial}_n : \overline{C}_n \longrightarrow \overline{C}_{n-1}$ durch
$$\overline{\partial}_n(x, y) := (-\partial_{n-1}(x), \varphi_{n-1}(x) + \partial\,'_n(y))$$
für $x \in C_{n-1}, y \in D_n$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\overline{C} = (\overline{C}_n, \overline{\partial}_n)$ ein Kettenkomplex ist.
   (b) Man nennt eine Kettenabbildung $\varphi : C \longrightarrow D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz, wenn es eine Kettenabbildung $\psi : D \longrightarrow C$ gibt, so dass $\psi \circ \varphi$ kettenhomotop zu id_C und $\varphi \circ \psi$ kettenhomotop zu id_D ist. Man nennt einen Kettenkomplex C kettenzusammenziehbar, wenn id_C kettenhomotop zu 0 ist. Zeigen Sie: Genau dann ist φ eine Kettenhomotopieäquivalenz, wenn $\overline{C}$ kettenzusammenziehbar ist.

Abgabe: Freitag, den 04.05.2004, 11.00 Uhr