Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2004
07.05.2004
Blatt 3

Übungen zu Topologie II

7. Zeigen Sie, dass man mit der folgenden Vorschrift einen Funktor Σ von der Kategorie der Kettenkomplexe in sich erhält:
   Ist $C = (C_n, \partial_n)$ ein Kettenkomplex, so sei
   $\Sigma C = ((\Sigma C)_n, \partial_n^\Sigma)$ gegeben durch

$$(\Sigma C)_n := C_{n-1},$$
$$\partial_n^\Sigma := -\partial_{n-1}.$$

   ΣC heißt die Einhängung oder Suspension von C.
   Was kann man über die Homologiegruppen von ΣC sagen?
   Definieren Sie für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch den Funktor Σ^k.

8. Seien $C = (C_n, \partial_n)$ und $D = (D_n, \partial_n^{'})$ zwei Kettenkomplexe. Wir definieren einen Kettenkomlex

$$\mathrm{Hom}(C, D) = (\mathrm{Hom}(C, D)_n, \widetilde{\partial}_n)$$

   folgendermaßen

$$\mathrm{Hom}(C, D)_n := \prod_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(C_\nu, D_{n+\nu})$$

   Das heißt: Ein Element $f \in \mathrm{Hom}(C_\nu, D)_n$ ist eine Folge $f = (f_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$, wobei $f_\nu : C_\nu \longrightarrow D_{n+\nu}$ ein Homomorphismus ist.

$$\widetilde{\partial}_n(f) := (\partial' f_\nu - (-1)^n f_{\nu-1} \partial)_{\nu \in \mathbb{Z}}$$

   Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{Hom}(C, D)$ ist tatsächlich ein Kettenkomplex .

   (b) Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $Z_{-k}\mathrm{Hom}(C, D)$ die Menge aller Kettenabbildungen von C nach $\Sigma^k D$.

   (c) Ist $g : D \longrightarrow D'$ eine Kettenabbildung, so auch

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(C, g) : \mathrm{Hom}(C, D) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(C, D') \\ (f_\nu) &\longmapsto (g \circ f_\nu). \end{aligned}$$

(d) Ist g eine Kettenhomotopieäquivalenz, so auch $\mathrm{Hom}(C, g)$.

9. Seien $C = (C_n, \partial_n)$ und $D = (D_n, \partial'_n)$ zwei Kettenkomplexe und sei $\varphi : C \longrightarrow D$ eine Kettenabbildung. Wir bezeichnen den Kettemkomplex $\overline{C}$ aus Aufgabe 6 nun mit $\mathcal{C}(\varphi)$ und nennen ihn den Abbildungskegel von φ.
Es gilt also:

$$\mathcal{C}(\varphi)_n := C_{n-1} \oplus D_n;$$

der Randoperator $\overline{\partial} : \mathcal{C}(\varphi)_n \longrightarrow \mathcal{C}(\varphi)_{n-1}$ ist gegeben durch

$$\overline{\partial}(x, y) := (-\partial(x), \varphi(x) + \partial'(y)).$$

Zeigen Sie:

(a) Man hat eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} \mathcal{C}(\varphi) \xrightarrow{p} \Sigma C \longrightarrow 0$$

mit $i(y) = (0, y)$ und $\pi(x, y) = x$.

(b) Ist φ eine Kettenhomotopieäquivalenz, so sind i und p kettenhomotop zu 0.

(c) Ist φ eine Kettenhomotopieäquivalenz, so sind alle Homologiegruppen von $\mathcal{C}(\varphi)$ Null.

(d) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 8(c) gilt:

$$\mathcal{C}\mathrm{Hom}(C, g) \cong \mathrm{Hom}(C, \mathcal{C}g).$$

(e) Ist φ eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $\mathcal{C}(\varphi)$ kettenzusammenziehbar. (Betrachten Sie das Element $id_{\mathcal{C}(\varphi)} \in Z_0 Hom(\mathcal{C}\varphi, \mathcal{C}\varphi)$.)

Abgabe: Freitag, den 14.05.2004, 11.00 Uhr