Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2004
28.05.2004
Blatt 6

Übungen zu Topologie II

15. (a) Präzisieren und beweisen Sie: Ein Limes eines gerichteten Systems ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
    (b) Finden Sie eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein gerichtetes System in $\mathcal{C}$, das keinen Limes besitzt.

16. Zeigen Sie, dass das gerichtete System abelscher Gruppen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

den Limes $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ hat. (Dies ist die abelsche Gruppe, die aus allen rationalen Zahlen der Form $\dfrac{a}{2^n}$ mit $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ besteht.)

17. (a) Sei (C, φ_λ) der Limes des gerichteten Systems $(C_\lambda, g_\lambda^\mu)$ abelscher Gruppen. Zeigen Sie:
    Ist $a \in C_\lambda$ mit $\varphi_\lambda(a) = 0$, so existiert ein μ mit $\lambda \leq \mu$, so dass $g_\lambda^\mu(a) = 0$.
    (b) Sei (C, φ_λ) der Limes des gerichteten Systems $(C_\lambda, g_\lambda^\mu)$ von Kettenkomplexen. Zeigen Sie:
    Ist $[w] \in H_n(C_\lambda)$ mit $(\varphi_\lambda)_*[w] = 0$, so existiert ein μ mit $\lambda \leq \mu$, so dass $(g_\lambda^\mu)_*[w] = 0$.

18. Vervollständigen Sie den Beweis des Fünferlemmas.

Abgabe: Freitag, den 04.06.2004, 11.00 Uhr