Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2004
04.06.2004
Blatt 7

Übungen zu Topologie II

19. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$Z_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$,
$W_n := Z_{2n} \backslash Z_n$,
$U_n := S^1 \backslash Z_n, V_n := S^1 \backslash W_n$.

   (a) Analysieren Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz von $(S^1; U_n, V_n)$.

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\varphi_n : S^1 \longrightarrow S^1$ durch $\varphi_n(z) := z^n$.
   Zeigen Sie: Für alle $x \in H_1(S^1)$ ist $(\varphi_n)_*(x) = nx$.

   (c) Verallgemeinern Sie b) auf alle $n \in \mathbb{Z}$.

20. Wir identifizieren $S^1 \vee S^1$ mit dem Raum

$$(S^1 \times \{0, 1\})/\{(1, 0), (1, 1)\}$$

und schreiben die Elemente von $S^1 \vee S^1$ in der Form $[z, i]$ mit $z \in S^1$ und $i \in \{0, 1\}$.
Dann ist also $[1, 0] = [1, 1] =: x_0$.
Für zwei beliebige Abbildungen $\varphi, \psi : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ mit $\varphi(1) = x_0 = \psi(1)$ definieren wir $\varphi * \psi : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ durch

$$\varphi * \psi(e^{2\pi it}) := \begin{cases} \varphi(e^{4\pi it}) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(e^{2\pi i(2t-1)}) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Wir haben stetige Abbildungen
$j_1, j_2, k_1, k_2 : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$

$$j_i(z) := [z, i],$$
$$k_i(z) := [z^{-1}, i].$$

Sei $\varphi := (j_1 * j_2) * (k_1 * k_2)$. Berechnen Sie mit einem ähnlichen Argument wie in Aufgabe 19 den Homomorphismus

$$\varphi_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1 \vee S^1).$$

21. (a) Sei $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{\psi} E \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Vergleichen Sie die zugehörige lange exakte Homologiesequenz mit der von
$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{-\varphi} D \xrightarrow{\psi} E \longrightarrow 0.$$

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien U, V Teilräume von X mit $X = \mathring{U} \cup \mathring{V}$. Vergleichen Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz von $(X; U, V)$ mit der von $(X; V, U)$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $f_n : S^n \longrightarrow S^n$ durch
$$f_n(x) := -x.$$
Folgern Sie aus b): Für $z \in \widetilde{H}_n(S^n)$ ist
$$(f_n)_*(z) = (-1)^{n+1} z.$$

Abgabe: Freitag, den 11.06.2004, 11.00 Uhr