Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2011/2012
14. Oktober 2011
Blatt 1

Übungen zu Einführung in die Topologie

1. (10 Punkte) Führen Sie den Beweis von Satz 1.2.b) aus. Zeigen Sie also: Ist X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, so ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält.

2. (10 Punkte)

   (a) Sei X ein Hausdorff-Raum und $a \in X$.
   Zeigen Sie, dass $\{a\}$ eine abgeschlossene Menge in X ist.

   (b) Zeigen Sie, dass es topologische Räume gibt, die keine Hausdorff-Räume sind, in denen aber jede einpunktige Teilmenge abgeschlossen ist.

3. (10 Punkte) Sei X ein topologischer Raum.

   (a) Eine Teilmenge A von X heißt **dicht** in X, wenn $\bar{A} = X$. Zeigen Sie, dass A genau dann dicht in X ist, wenn gilt:
   Ist U offen in X, $U \neq \emptyset$, so ist $U \cap A \neq \emptyset$.

   (b) X heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt.
   Zeigen Sie: Wenn die Topologie von X eine abzählbare Basis besitzt, so ist X separabel.

4. (10 Punkte) Zeigen Sie: Eine Menge $\mathcal{B}$ von Teilmengen der Menge X ist genau dann Basis einer Topologie auf X, wenn X die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{B}$ ist und wenn der Durchschnitt von je endlich vielen Mengen aus $\mathcal{B}$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ oder leer ist.

Abgabe: Freitag, den 21. Oktober 2011, 10:30 Uhr