Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2011/2012
16. Dezember 2011
Blatt 10

Übungen zu Einführung in die Topologie

39. (12 Punkte) Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *lokaler Homöomorphismus*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U in X besitzt, so dass $f \,|\, U$ einen Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von Y liefert. Zeigen Sie:

    (a) Ein lokaler Homöomorphismus ist stetig.

    (b) Ein lokaler Homöomorphismus ist eine offene Abbildung.

    (c) Eine Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus.

    (d) Es gibt lokale Homöomorphismen, die keine Überlagerungen sind.

40. (10 Punkte) Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum.

    (a) Folgern Sie aus Aufg. 10 von Blatt 3: Ist $U_1, \ldots, U_n$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es eine offene Überdeckung $V_1, \ldots, V_n$ von X mit $\bar{V}_i \subseteq U_i \; \forall i$.

    (b) Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und ist $p^{-1}(x)$ eine endliche Menge für jedes $x \in X$, so ist $\tilde{X}$ kompakt.

41. (10 Punkte)

    (a) Seien $p_i : \tilde{X}_i \to X_i$ Überlagerungen, $i = 1, \ldots, n$. Ist $\tilde{X} := \tilde{X}_1 \times \cdots \times \tilde{X}_n$, $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ und $p := p_1 \times \cdots \times p_n : \tilde{X} \to X$, so ist p eine Überlagerung.

    (b) Die Bezeichnungen seien wie in (a); außerdem seien die $\tilde{X}_i$ wegzusammenhängend. Sei G_i die Gruppe der Decktransformationen von p_i, $i = 1, \ldots, n$, und G die von p.
    Zeigen Sie, dass man durch
    $$(h_1, \ldots, h_n) \mapsto h_1 \times \cdots \times h_n$$
    einen Isomorpismus von $G_1 \times \cdots \times G_n$ auf G erhält.

42. (8 Punkte) Wie in Aufgabe 36 betrachten wir für eine ganze Zahl $k \neq 0$ die durch $p(z) = z^k$ definierte Überlagerung $p : S^1 \to S^1$. Bestimmen Sie die Gruppe der Decktransformationen von p, indem Sie direkt von der Definition einer Decktransformation ausgehen.

Abgabe: Freitag, den 23. Dezember 2011, 10:30 Uhr