Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2011/2012
13. Januar 2012
Blatt 12

Übungen zu Einführung in die Topologie

46. (9 Punkte) Sei $X := P^2(\mathbb{R}) \times P^2(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen von Überlagerungen $p : \widetilde{X} \to X$ mit wegzusammenhängendem $\widetilde{X}$.

47. (9 Punkte) Wir betrachen den Torsus $T^2 = S^1 \times S^1$. Zeigen Sie, dass es jeweils unendlich viele paarweise nicht-äquivalente Überlagerungen $p : \widetilde{X} \to T^2$ mit $\widetilde{X} = T^2$ und $\widetilde{X} = \mathbb{R} \times S^1$ gibt.

48. (10 Punkte) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $X_k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - k| = 1\}$.
Sei $X := X_{-1} \cup X_1$, $\tilde{X} := X_{-3} \cup X_{-1} \cup X_1 \cup X_3$ und sei $p : \tilde{X} \to X$ die folgende Abbildung:

    - für $z \in X_3$ sei $p(z) = z - 2$,
    - für $z \in X_1$ sei $p(z) = (z-1)^2 - 1$ und
    - für $z \in X_{-3} \cup X_{-1}$ sei $p(z) = -p(-z)$.

    Fertigen Sie eine Skizze von p an, an der man erkennen kann, dass p eine Überlagerung ist.
Welche Blätterzahl hat p? Zeigen Sie: Es gibt einen geschlossenen Weg in X, der sowohl geschlossene als auch nicht geschlossene Hochhebungen besitzt.

49. (12 Punkte) Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wobei $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

    (a) Genau dann ist p regulär, wenn es ein $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$ gibt, so dass $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ Normalteiler in $\pi_1(X, p(\tilde{x_0}))$ ist.

    (b) Ist p regulär und sind $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x_0}) = p(\tilde{x_1})$, so gibt es eine Decktransformation h mit $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$.

    (c) Genau dann ist p regulär, wenn für jeden geschlossenen Weg in X entweder alle Hochhebungen geschlossen sind oder keine Hochhebung geschlossen ist.

    (d) Die Überlagerung aus Aufgabe 48 ist nicht regulär.

Abgabe: Freitag, den 20. Januar 2012, 10:30 Uhr