

Übungen zu Einführung in die Topologie

50. (12 Punkte)

- (a) Ist G eine Gruppe, so sei

$$F(G) := \text{Hom}(G, \mathbb{Q})$$

die Menge aller Homomorphismen von G in die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Erläutern Sie, wie man $F(G)$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum betrachten kann.

- (b) Ist $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so erhält man durch $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$ eine $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung

$$\varphi^* : F(H) \rightarrow F(G).$$

Damit wird F zu einem kontravarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der $\mathbb{Q}$ -Vektorräume.

- (c) Sei $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ mit n Faktoren. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} F(\mathbb{Z}^n)$ und folgern Sie, dass $\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{Z}^m$ für $n \neq m$ nicht isomorph sind.
- (d) Sei $p_G : G \rightarrow G_{\text{ab}}$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $p_G^* : F(G_{\text{ab}}) \rightarrow F(G)$ ein Isomorphismus ist.

51. (10 Punkte) Seien G und H Gruppen. Zeigen Sie, dass

$$(G * H)_{\text{ab}} \cong G_{\text{ab}} \times H_{\text{ab}}.$$

52. (8 Punkte) Zeigen Sie, dass $P^1(\mathbb{R})$ homöomorph zu S^1 ist.

53. (10 Punkte) Seien $g, k \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene Punkte in M_g . Berechnen Sie $\pi_1(M_g \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$.

Abgabe: Freitag, den 27. Januar 2012, 10:30 Uhr