Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2011/2012
28. Oktober 2011
Blatt 3

Übungen zu Einführung in die Topologie

9. (12 Punkte) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) X ist ein Hausdorff-Raum.

   (b) Jeder Punkt von x ist der Durchschnitt seiner abgeschlossenen Umgebungen.

   (c) Die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

   (d) Jeder Filter in X besitzt höchstens einen Limes.

10. (8 Punkte) Sei X ein Hausdorff-Raum und seien A, B kompakte Teilmengen von X mit
$A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es offene Teilmengen U, V von X mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

11. (10 Punkte)

   (a) Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, und $X_1 \times X_2$ trage die Produkttopologie. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_i$ die Quotiententopologie bezüglich pr_i ist.

   (b) Finden Sie ein Beispiel für einen Hausdorff-Raum X und eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, so dass $X/\sim$ mit der Quotiententopologie nicht Hausdorffsch ist.

12. (10 Punkte) Sei T der Torus in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man die Teilmenge $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ um die z-Achse rotieren lässt. Zeigen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zueinander sind:

   (a) T

   (b) $S^1 \times S^1$

   (c) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 := \mathbb{R}^2/\sim$, wobei für $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$u \sim v :\Leftrightarrow \ \exists\, w \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } v = u + w.$$

Abgabe: Freitag, den 4. November 2011, 10:30 Uhr