Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2011/2012
4. November 2011
Blatt 4

Übungen zu Einführung in die Topologie

13. (10 Punkte) Vervollständigen Sie die Beweise von Lemma 3 und Lemma 4 von § 3 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie:
    (a) Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter in X. Für jede Teilmenge A von X sei $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.
    (b) Seien X_i topologische Räume ($i \in I$), sei $\mathcal{F}$ ein Filter in $X := \prod_{i\in I} X_i$ und $x \in X$. Sei $x_i := \mathrm{pr}_i(x) \in X_i$. Genau dann konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x, wenn für jedes i der Filter $\mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$ gegen x_i konvergiert.
14. (10 Punkte) Seien $X_i (i \in I)$ nicht-leere topologische Räume. Zeigen Sie: Genau dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ Hausdorffsch, wenn alle X_i Hausdorffsch sind.
15. (10 Punkte) Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, und sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sei $\mathcal{F}_0$ der Umgebungsfilter von x_0. Zeigen Sie:
    (a) Genau dann ist f stetig in x_0, wenn $f(x_0)$ Limes von $f(\mathcal{F}_0)$ ist.
    (b) Genau dann ist f stetig in x_0, wenn gilt: Ist $\mathcal{F}$ ein Filter in X mit Limes x_0, so hat $f(\mathcal{F})$ den Limes $f(x_0)$.
16. (10 Punkte)
    (a) S^n ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.
    (b) Der Teilraum $S^1 \cup \{(x,0) \mid 1 \leq x \leq 2\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist homotopieäquivalent zu S^1.

Abgabe: Freitag, den 11.11.11, 11:11 Uhr