Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2011/2012
18. November 2011
Blatt 6

Übungen zu Einführung in die Topologie

21. (8 Punkte) Seien X, Y topologische Räume, $x_0, x_1 \in X$. Sei $f : X \to Y$ stetig und $y_0 := f(x_0),\ y_1 := f(x_1)$. Ist w ein Weg in X von x_0 nach x_1 und $v := f \circ w$, so ist
$$f_* \circ \sigma_w = \sigma_v \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1).$$

22. (8 Punkte) Zeigen Sie: Ein wegzusammenhängender Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $S^1 \to X$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

23. (8 Punkte)
    (a) Seien A, B zwei finale (bzw. zwei initiale Objekte) in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass A und B isomorph sind.
    (b) Sei K ein Körper und $\mathcal{V}_K$ die Kategorie der K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es in $\mathcal{V}_K$ ein finales und ein initiales Objekt gibt und dass je zwei beliebige Objekte ein Produkt und ein Koprodukt besitzen.

24. (8 Punkte) Führen Sie den Beweis von Lemma 2 von §7 aus, d.h. zeigen Sie, dass Koprodukte, falls sie existieren, im Wesentlichen eindeutig bestimmt sind.

25. (8 Punkte) Seien (A_1, a_1) und (A_2, a_2) punktierte topologische Räume.
    Sei $A := \{(x, y) \in A_1 \times A_2 \mid x = a_1 \text{ oder } y = a_2\}$.
    Zeigen Sie, dass die punktierten topologischen Räume $(A, (a_1, a_2))$ und $(A_1 \vee A_2, a_1 \vee a_2)$ isomorphe Objekte in $\mathcal{T}^0$ sind und zeigen Sie, dass sie zusammen mit den offensichtlichen Abbildungen Koprodukt von (A_1, a_1) und (A_2, a_2) in $\mathcal{T}^0$ sind.

Abgabe: Freitag, den 25. November 2011, 10:30 Uhr