

Übungen zu Einführung in die Topologie

26. (10 Punkte) Vervollständigen Sie den Beweis, dass im freien Produkt $G = G_1 * G_2$ zweier Gruppen G_1, G_2 das Assoziativgesetz erfüllt ist. (Dafür ist noch folgender Spezialfall zu zeigen:

Ist $(x_1, \dots, x_n) \in G$ und sind $g, g' \in G_i$, so ist

$$g \cdot (g' \cdot (x_1, \dots, x_n)) = (gg') \cdot (x_1, \dots, x_n).$$

27. (5 Punkte) Zeigen Sie mit der Definition eines Koprodukts, also ohne Benutzung der Sätze von §7, dass das Produkt $G_1 \times G_2$ im Allgemeinen nicht das Koprodukt der Gruppen G_1 und G_2 in der Kategorie der Gruppen ist.
28. (7 Punkte) Sei Σ_3 die Gruppe aller bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ auf sich. Bestimmen Sie alle Untergruppen und alle Normalteiler von Σ_3 .
29. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G vom Index 2. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.
30. (6 Punkte) Das *Zentrum* Z einer Gruppe G ist definiert als
 $Z := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$
- (a) Zeigen Sie, dass Z ein Normalteiler von G ist.
- (b) Sind G_1 und G_2 zwei Gruppen, die nicht nur aus dem Einselement bestehen, so ist das Zentrum von $G_1 * G_2$ trivial.
31. (8 Punkte) Das freie Produkt $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ heißt die *unendliche Diedergruppe*. Wir bezeichnen das nicht-triviale Element des ersten Faktors mit a und das des zweiten Faktors mit b . Die Elemente von G sind also von der Form

$$e, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, \dots$$

Wir definieren $l : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als die Länge eines Wortes modulo 2. Zeigen Sie: l ist ein Epimorphismus, dessen Kern eine unendliche zyklische Gruppe ist.

Abgabe: Freitag, den 2. Dezember 2011, 10:30 Uhr