

Übungen zu Einführung in die Topologie

32. (6 Punkte) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\pi_1(S^n \vee S^m)$.

33. (6 Punkte) Gegeben sei ein Push-out-Diagramm in der Kategorie der Gruppen der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H \end{array}$$

mit $\varphi_1(n) = 2n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe H mehr als ein Element enthält.

34. (28 Punkte) Sei $M := ([0, 1] \times] - 1, 1[) / \sim$, wobei \sim die von $(0, t) \sim (1, -t)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Man nennt M das Möbiusband.

(a) M ist homotopieäquivalent zu S^1 .

(b) Jeder Punkt von M besitzt eine offene Umgebung, die homöomorph zu \mathbb{R}^2 ist.

(c) Sei $p : [0, 1] \times] - 1, 1[\rightarrow M$ die natürliche Projektion und $S := p([0, 1] \times \{0\})$ die „Seele“ des Möbiusbandes.

Zeigen Sie, dass $M \setminus S$ homotopieäquivalent zu S^1 ist. Insbesondere ist $M \setminus S$ zusammenhängend.

(d) Wie viele Zusammenhangskomponenten hat

$$M \setminus p\left([0, 1] \times \left\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\}\right)?$$

(e) Machen Sie sich die bisherigen Teilaufgaben an einem Papiermodell klar!

(f) Sei $i : M \setminus S \rightarrow M$ die Inklusion. Berechnen Sie $i_* : \pi_1(M \setminus S) \rightarrow \pi_1(M)$.

(g) Folgern Sie mittels Aufgabe 33 und des Satzes von Seifert-van Kampen, dass S^2 keine zu M homöomorphe offene Teilmenge enthält. Insbesondere ist M nicht homöomorph zum Zylinder $S^1 \times] - 1, 1[$.

Abgabe: Freitag, den 9. Dezember 2011, 10:30 Uhr