Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
19.10.07
Blatt 1

Übungen zu Topologie I

1. Führen Sie den Beweis von Satz 1.2.b) aus. Zeigen Sie also: Ist X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, so ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält.

2. Führen Sie den Beweis der folgenden in §1 angegebenen Bemerkung aus:

   Ist X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen von X, so gilt:

   (a) Es gibt genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so dass $\mathcal{S}$ Subbasis von $\mathcal{T}$ ist.

   (b) Ist $\mathcal{B}$ die Menge der Durschschnitte von endlich vielen Elementen von $\mathcal{S}$, so ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$.

   (c) $\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X mit $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$.

3. Sei X ein topologischer Raum.

   (a) Eine Teilmenge A von X heißt **dicht** in X, wenn $\bar{A} = X$. Zeigen Sie, dass A genau dann dicht in X ist, wenn gilt:
   Ist U offen in X, $U \neq \emptyset$, so ist $U \cap A \neq \emptyset$.

   (b) X heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt.
   Zeigen Sie: Wenn die Topologie von X eine abzählbare Basis besitzt, so ist X separabel.

Abgabe: Mittwoch, den 26.10.2007, 9.15 Uhr