Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
21.12.07
Blatt 10

Übungen zu Topologie I

1. Vervollständigen Sie den Beweis, dass im freien Produkt $G = G_1 * G_2$ zweier Gruppen G_1, G_2 das Assoziativgesetz erfüllt ist. (Dafür ist noch folgender Spezialfall zu zeigen: Ist $(x_1, ..., x_n) \in G$ und sind $g, g' \in G_i$, so ist

$$g \cdot (g' \cdot (x_1, ..., x_n)) = (gg') \cdot (x_1, ..., x_n).)$$

2. Seien G_1, G_2 zwei nicht-triviale Gruppen. Zeigen Sie:
   (a) Das Zentrum von $G_1 * G_2$ ist trivial.
   (b) Ein Element endlicher Ordnung von $G_1 * G_2$ ist konjugiert zu einem Element von G_1 oder von G_2.

3. Das freie Produkt $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ heißt die unendliche Diedergruppe. Wir bezeichnen das nicht-triviale Element des ersten Faktors mit a und das des zweiten Faktors mit b. Die Elemente von G sind also von der Form

$$e, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, ...$$

   Wir definieren $l : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als die Länge eines Wortes modulo 2. Zeigen Sie: l ist ein Epimorphismus, dessen Kern eine unendliche zyklische Gruppe ist.

4. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\pi_1(S^n \vee S^m)$.

Abgabe: Freitag, den 11.01.2008, 9.15 Uhr