Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
11.01.2008
Blatt 11

Übungen zu Topologie I

1. Sei $M := ([0,1] \times]-1,1[)/\sim$, wobei $\sim$ die von $(0,t) \sim (1,-t)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Man nennt M das Möbiusband.

   (a) M ist homotopieäquivalent zu S^1.

   (b) Jeder Punkt von M besitzt eine offene Umgebung, die homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

   (c) Sei $p : [0,1] \times]-1,1[\to M$ die natürliche Projektion und $S := p([0,1] \times \{0\})$ die „Seele"des Möbiusbandes.
   Zeigen Sie, dass $M \backslash S$ homotopieäquivalent zu S^1 ist. Insbesondere ist $M \backslash S$ zusammenhängend.

   (d) Wie viele Zusammenhangskomponenten hat
   $$M \backslash p([0,1] \times \{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\})?$$

   (e) Machen Sie sich die bisherigen Teilaufgaben an einem Papiermodell klar!

   (f) Sei $i : M \backslash S \to M$ die Inklusion. Berechnen Sie $i_* : \pi_1(M \backslash S) \to \pi_1(M)$.

   (g) Gegeben sei ein Push-out-Diagramm in der Kategorie der Gruppen der Form
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H \end{array}$$
   mit $\varphi_1(n) = 2n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe H mehr als ein Element enthält.

   (h) Folgern Sie mittels des Satzes von Seifert-van Kampen, dass S^2 keine zu M homöomorphe offene Teilmenge enthält. Insbesondere ist M nicht homöomorph zum Zylinder $S^1 \times]-1,1[$.

Abgabe: Freitag, den 18.01.2008, 9.15 Uhr