Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
18.01.2008
Blatt 12

Übungen zu Topologie I

1. (a) Ist G eine Gruppe, so sei

$$F(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q})$$

die Menge aller Homomorphismen von G in die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Erläutern Sie, wie man $F(G)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum betrachten kann.

(b) Ist $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so erhält man durch $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\varphi^* : F(H) \to F(G).$$

Damit wird F zu einem kontravarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der $\mathbb{Q}$-Vektorräume.

(c) Sei $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ mit n Faktoren. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} F(\mathbb{Z}^n)$ und folgern Sie, dass $\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{Z}^m$ für $n \neq m$ nicht isomorph sind.

(d) Sei $p_G : G \to G_{\mathrm{ab}}$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $p_G^* : F(G_{\mathrm{ab}}) \to F(G)$ ein Isomorphismus ist.

2. Seien G und H Gruppen. Zeigen Sie, dass

$$(G * H)_{\mathrm{ab}} \cong G_{\mathrm{ab}} \times H_{\mathrm{ab}}.$$

Abgabe: Freitag, den 25.01.2008, 9.15 Uhr