Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
26.10.07
Blatt 2

Übungen zu Topologie I

1. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, die von der Form $[a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ sind.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$ ist. Wir bezeichnen den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mit X.

   (b) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist feiner als die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$.

   (c) Jedes Element von $\mathcal{B}$ ist offen und abgeschlossen in X.

   (d) Der Raum X ist separabel, aber seine Topologie besitzt keine abzählbare Basis.

2. Sei X der topologische Raum aus Aufgabe 4 und sei $Y = X \times X$ mit der Produkttopologie. Wie sieht die Relativtopologie auf $\{(x, y) \in Y \mid x + y = 0\}$ aus?

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und A eine nicht-leere Teilmenge von X.
   Ist $x \in X$, so sei
   $$\operatorname{dist}(x, A) := \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}.$$
   Wir definieren $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \operatorname{dist}(x, A)$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

4. Sind $X,\ Y,\ X',\ Y'$ Mengen und $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ Abbildungen, so definiert man
   $$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$
   durch
   $$(f \times g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$
   Zeigen Sie: Sind $X,\ Y,\ X',\ Y'$ topologische Räume, so ist $f \times g$ genau dann stetig, wenn f und g stetig sind.

Abgabe: Freitag, den 02.11.2007, 9.15 Uhr