Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
02.11.07
Blatt 3

Übungen zu Topologie I

1. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) X ist ein Hausdorff-Raum.
   (b) Jeder Punkt von x ist der Durchschnitt seiner abgeschlossenen Umgebungen.
   (c) Die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.
   (d) Jeder Filter in X besitzt höchstens einen Limes.

2. Führen Sie den Beweis von Lemma 1 von § 3 im Detail aus, d. h. zeigen Sie:
   Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter in X und $x \in X$. Genau dann ist x ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn es einen Filter $\mathcal{F}'$ in X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ gibt, so dass x Limes von $\mathcal{F}'$ ist.

3. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter in der Menge X. Er habe die folgende Eigenschaft: Für jede Teilmenge A von X ist $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist.

4. Sei X ein Hausdorff-Raum und seien A, B kompakte Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es offene Teilmengen U, V von X mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

5. Sei T der Torus in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man die Teilmenge $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ um die z-Achse rotieren lässt. Zeigen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zueinander sind:
   (a) T
   (b) $S^1 \times S^1$
   (c) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 := \mathbb{R}^2/\sim$, wobei für $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt:
   $$u \sim v :\Leftrightarrow \exists\, w \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } v = u + w.$$

Abgabe: Freitag, den 09.11.2007, 9.15 Uhr