Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
16.11.07
Blatt 5

Übungen zu Topologie I

1. Seien X, Y topologische Räume, $x_0, x_1 \in X$. Sei $f : X \to Y$ stetig und $y_0 := f(x_0),\ y_1 := f(x_1)$. Ist w ein Weg in X von x_0 nach x_1 und $v := f \circ w$, so ist
$$f_* \circ \sigma_w = \sigma_v \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1).$$

2. Seien X und Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.
Zeigen Sie: Die Abbildung $(pr_{1*}, pr_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist ein Isomorphismus.

3. (a) Seinen X, Y topologische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Ist f eine Homotopieäquivalenz und ist $f \simeq g$, so ist g eine Homotopieäquivalenz.
   (b) Was sind die Isomorphismen in der Homotopiekategorie $\mathfrak{T}_h$?

4. Zeigen Sie: Ein wegzusammenhängender Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $S^1 \to X$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

5. Sei G eine topologische Gruppe, d.h. gleichzeitig ein topologischer Raum und eine Gruppe, so dass die Abbildungen
$$\begin{array}{rlcl} m: & G \times G \to G & \text{und} & G \to G \\ & (x,y) \mapsto xy & & x \mapsto x^{-1} \end{array}$$
stetig sind. Sei 1 das Einselement von G.
Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, 1)$ abelsch ist und dass die Multiplikation in $\pi_1(G, 1)$ durch m_* gegeben ist, wenn man (nach Aufgabe 15) $\pi_1(G \times G, (1, 1))$ mit $\pi_1(G, 1) \times \pi_1(G, 1)$ identifiziert.

Abgabe: Freitag, den 23.11.2007, 9.15 Uhr