Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
30.11.07
Blatt 7

Übungen zu Topologie I

1. Bestimmen Sie für die folgenden Gruppen G die Anzahlen der Untergruppen, der Normalteiler und der Konjugationsklassen von Untergruppen:
   (a) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (die Kleinsche Vierergruppe)
   (b) $G = \Sigma_3$ (die symmetrische Gruppe aller Permutationen der Zahlen 1, 2, 3).

2. Ist $h \in \mathbb{Z}$ und $h \neq 0$, so ist die durch $p(z) := z^h$ definierte Abbildung $p : S^1 \to S^1$ eine Überlagerung.

3. (a) Seien $p_i : \tilde{X}_i \to X_i$ Überlagerungen, $i = 1, \ldots, n$. Ist $\tilde{X} := \tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_n$, $X := X_1 \times \ldots \times X_n$ und $p := p_1 \times \ldots \times p_n : \tilde{X} \to X$, so ist p eine Überlagerung.
   (b) Die Bezeichnungen seien wie in (a); außerdem seien die $\tilde{X}_i$ wegzusammenhängend. Sei G_i die Gruppe der Decktransformationen von p_i, $i = 1, \ldots, n$, und G die von p.
   Zeigen Sie, dass man durch
   $$(h_1, \ldots, h_n) \mapsto h_1 \times \ldots \times h_n$$
   einen Isomorpismus von $G_1 \times \ldots \times G_n$ auf G erhält.

4. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $X_k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - k| = 1\}$.
   Sei $X := X_{-1} \cup X_1$, $\tilde{X} := X_{-3} \cup X_{-1} \cup X_1 \cup X_3$ und sei $p : \tilde{X} \to X$ die folgende Abbildung:
   - für $z \in X_3$ sei $p(z) = z - 2$,
   - für $z \in X_1$ sei $p(z) = (z-1)^2 - 1$ und
   - für $z \in X_{-3} \cup X_{-1}$ sei $p(z) = -p(-z)$.

   Fertigen Sie eine Skizze von p an, an der man erkennen kann, dass p eine Überlagerung ist.
   Welche Blätterzahl hat p? Zeigen Sie: Es gibt einen geschlossenen Weg in X, der sowohl geschlossene als auch nicht geschlossene Hochhebungen besitzt.

Abgabe: Freitag, den 07.12.2007, 9.15 Uhr