Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
07.12.07
Blatt 8

Übungen zu Topologie I

1. Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum, dessen Fundamentalgruppe isomorph ist zu

   (a) der Kleinschen Vierergruppe

   (b) der symmetrischen Gruppe Σ_3.

   Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Äquivalenzklassen von Überlagerungen und von regulären Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$ mit wegzusammenhängendem $\tilde{X}$.

2. (a) Ist $p : \tilde{X} \to S^1$ eine Überlagerung mit wegzusammenhängendem $\tilde{X}$, so ist $\tilde{X}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1.

   (b) Ist $p : \tilde{X} \to S^1 \times S^1$ eine Überlagerung mit wegzusammenhängendem $\tilde{X}$, so ist $\tilde{X}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, zu $\mathbb{R} \times S^1$ oder zu $S^1 \times S^1$.
   (Für Leute mit Algebra-Kenntnissen.)

3. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, wobei $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

   (a) Genau dann ist p regulär, wenn es ein $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$ gibt, so dass $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ Normalteiler in $\pi_1(X, p(\tilde{x_0}))$ ist.

   (b) Ist p regulär und sind $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x_0}) = p(\tilde{x_1})$, so gibt es eine Decktransformation h mit $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$.

   (c) Genau dann ist p regulär, wenn für jeden geschlossenen Weg in X entweder alle Hochhebungen geschlossen sind oder keine Hochhebung geschlossen ist.

   (d) Die Überlagerung aus Aufgabe 4 vom Blatt 7 mit der Basis
   $$X = \{z \in \mathbb{C} |\, |z+1| = 1 \,\text{oder}\, |z-1| = 1\}$$
   ist nicht regulär. Insbesondere ist $\pi_1(X)$ nicht abelsch.

4. Finden Sie unendlich viele paarweise nicht-homöomorphe wegzusammenhängende Räume, die Totalraum einer Überlagerung mit der Basis
   $$X = \{z \in \mathbb{C} |\, |z+1| = 1 \,\text{oder}\, |z-1| = 1\}$$
   sind. Nach Möglichkeit sollte darunter ein einfach zusammenhänger Raum sein.

Abgabe: Freitag, den 14.12.2007, 9.15 Uhr