Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2007/2008
14.12.07
Blatt 9

Übungen zu Topologie I

1. (a) Seien A, B zwei finale (bzw. zwei initiale Objekte) in einer Kategorie $\mathfrak{C}$. Zeigen Sie, dass A und B isomorph sind.
   (b) Sei K ein Körper und $\mathfrak{V}_K$ die Kategorie der K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es in $\mathfrak{V}_K$ ein finales und ein initiales Objekt gibt und dass je zwei beliebige Objekte ein Produkt und ein Koprodukt besitzen.

2. Gegeben sei ein Pull-back-Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & A_0 \times B \arrow[d, "pr_1"] \\ A_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] & A_0 \end{tikzcd}$$

   in der Kategorie $\mathfrak{T}$ der topologischen Räume. Was können Sie über A, ψ_1 und ψ_2 sagen?

3. Führen Sie den Beweis von Lemma 2 von §9 aus, d.h. zeigen Sie, dass Koprodukte, falls sie existieren, im Wesentlichen eindeutig bestimmt sind.

4. Seien (A_1, a_1) und (A_2, a_2) punktierte topologische Räume.
   Sei $A := \{(x, y) \in A_1 \times A_2 \mid x = a_1 \text{ oder } y = a_2\}$.
   Zeigen Sie, dass die punktierten topologischen Räume $(A, (a_1, a_2))$ und $(A_1 \vee A_2, a_1 \vee a_2)$ isomorphe Objekte in $\mathfrak{T}^0$ sind und zeigen Sie, dass sie zusammen mit den offensichtlichen Abbildungen Koprodukt von (A_1, a_1) und (A_2, a_2) in $\mathfrak{T}^0$ sind.

Abgabe: Freitag, den 21.12.2007, 9.15 Uhr