Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2008
01.07.2008
Blatt 11

Übungen zu Topologie II

40. (a) Sei X ein topologischer Raum wie in Aufgabe 39. Berechnen Sie die Homologie- und Kohomologiegruppen von $X \times X$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/3$ und $\mathbb{Z}/4$.
    (b) Seien $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
    Ist $S^n \times S^m$ homotopieäquivalent zu $S^{n'} \times S^{m'}$, so ist $\{n, m\} = \{n', m'\}$.
    (c) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $X := P^n(\mathbb{R}) \times P^m(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Es gibt Elemente $u, v \in H^1(X; \mathbb{F}_2)$, so dass
    $$H^*(X; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[u, v]/(u^{n+1}, v^{m+1}).$$
    (d) Seien $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
    Ist $P^n(\mathbb{R}) \times P^m(\mathbb{R})$ homotopieäqivalent zu $P^{n'}(\mathbb{R}) \times P^{m'}(\mathbb{R})$, so ist $\{n, m\} = \{n', m'\}$.

41. Sei K ein Körper. Ein graduierter K-Vektorraum ist ein K-Vektorraum V mit einer Zerlegung $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ in eine direkte Summe von Unterräumen.
    Ist V ein endlich-dimensionaler graduierter K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $\varphi(V_n) \subseteq V_n$ für alle n, so bezeichnen wir mit $\varphi_n : V_n \to V_n$ die Einschränkung von φ und nennen
    $$\lambda(\varphi) := \Sigma(-1)^n \text{ Spur } (\varphi_n)$$
    die Lefschetz-Zahl von φ.
    Ist C ein endlich-dimensionaler K-Kettenkomplex, $\varphi : C \to C$ eine Kettenabbildung und $\varphi_* : H_*(C) \to H_*(C)$ der induzierte Homomorphismus, so zeige man in Verallgemeinerung von Satz 13.1 :
    $$\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_*)$$
    („Spurformel von Hopf“).

42. Ist X ein topologischer Raum mit $\dim_{\mathbb{Q}} H_*(X; \mathbb{Q}) < \infty$ und ist $f : X \to X$ stetig mit induziertem Homomorphismus $f_* : H_*(X; \mathbb{Q}) \to H_*(X; \mathbb{Q})$, so nennen wir
    $$\lambda(f) := \lambda(f_*)$$
    die Lefschetz-Zahl von f.
    Sei K ein Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^m$ und $\varphi : K \to K$ eine simpliziale Abbildung, so dass σ und $\varphi(\sigma)$ für jedes $\sigma \in K$ disjunkt sind, so folgere man aus Aufgabe 41:
    $$\lambda(|\varphi|) = 0.$$
    Bemerkung: Ist X ein kompaktes Polyeder und ist $f : X \to X$ stetig, so kann man allgemeiner mittels des simplizialen Approximationssatzes zeigen:
    Ist $\lambda(f) \neq 0$, so besitzt f einen Fixpunkt („Fixpunktsatz von Lefschetz“).

Abgabe: Dienstag, den 08.07.2008, in der Vorlesung