Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2008
13.05.2008
Blatt 5

Übungen zu Topologie II

15. (a) Präzisieren und beweisen Sie: Ein Limes eines gerichteten Systems ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

    (b) Finden Sie eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein gerichtetes System $\mathcal{C}$, das keinen Limes besitzt.

16. Zeigen Sie, dass das gerichtete System abelscher Gruppen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow ...$$

den Limes $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ hat. (Dies ist die abelsche Gruppe, die aus allen rationalen Zahlen der Form $\dfrac{a}{2^n}$ mit $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ besteht.)

17. Finden Sie eine Folge (a_n) ganzer Zahlen, so dass das gerichtete System abelscher Gruppen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot a_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot a_2} \mathbb{Z} \longrightarrow ...$$

den Limes $\mathbb{Q}$ hat.

18. Gegeben sei ein gerichtetes System abelscher Gruppen der Form

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{g_1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{g_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{g_3} ...$$

Was kann man über seinen Limes sagen?

19. Sei (C, φ_λ) der Limes des gerichteten Systems $(C_\lambda, g_\lambda^\mu)$ abelscher Gruppen.
Zeigen Sie:
Ist $a \in C_\lambda$ mit $\varphi_\lambda(a) = 0$, so existiert ein μ mit $\lambda \leq \mu$, so dass $g_\lambda^\mu(a) = 0$.

Abgabe: Dienstag, den 27.05.2008, in der Vorlesung